ОБЩЕПОНЯТНАЯ ПРАКТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРІЯ.

Сочиненіе
А. Лёве.

ВТОРОЕ ИЗДАНІЕ, ПЕРЕДѢЛАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ.
Съ 302 чертежами, помѣщенными въ текстѣ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Печатано въ типографіи братьевъ Кругъ.
1865.

Дозволено цензурою. С. Петербургъ 12 Января 1865 года.

Въ предисловіи къ первому изданію «общепонятной практической Геометріи» было объяснено, что при составленіи этого сочиненія приняты въ соображеніе два обстоятельства: общепонятное изложеніе главныхъ и необходимыхъ правилъ Геометріи, и примѣненіе ихъ къ рѣшенію задачъ, относящихся къ разнымъ случаямъ общежитія. Для выполненія перваго условія, какъ объясненія, такъ и доказательства изложенныхъ истинъ избраны самыя простыя, и слѣдовательно доступныя даже для тѣхъ, чьи математическія познанія ограничиваются четырьмя дѣйствіями надъ цѣлыми числами и обыкновенными дробями. По этой-же причинѣ устранены всѣ формулы, буквенныя выраженія и тѣ геометрическія начала, которыя примѣняются только къ высшимъ частямъ Математики.

Для выполненія-же втораго условія, предложены въ особыхъ отдѣлахъ, численныя задачи, относящіяся къ строительному искусству, межеванію, Физикѣ, Географіи, и т. д.; также въ особомъ отдѣлѣ изложены правила съемки, межеванія и нивеллированія, примѣненныя къ простѣйшимъ и дешевѣйшимъ инструментамъ.

При настоящемъ изданіи считаю нужнымъ объяснить, что оно въ сущности мало отличается отъ перваго изданія; въ немъ измѣнены только нѣкоторыя объясненія и доказательства, вкратцѣ показано извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, и гравированные чертежи замѣнены политипажами, напечатанными въ текстѣ; далѣе въ этомъ изданіи послѣ каждой статьи помѣщены вопросы для повторенія изложенныхъ въ ней правилъ (такихъ вопросовъ собрано болѣе 400); подобныхъ-же вопросовъ, относящихся ко всѣмъ правиламъ Геометріи, помѣщено въ концѣ книги.

При составленіи предлагаемаго учебника я руководствовался слѣдующими сочиненіями: *Dr. Müller* — Elementder ebenen Geometrie und Stereometrie. *Ebensperger* — gemeinfassliche Geometrie für Anfänger. *Keller* — Leitfaden beim Unterricht in der Geometrie. *Spitz* — geometrische Aufgaben.

21-го Декабря 1864. *А. Лёве.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ V.

Линіи и углы въ кругѣ. Начертаніе кривыхъ линій и правильныхъ многоугольниковъ. Вычисленіе окружности круга.

ОТДѢЛЪ VI.

Измѣреніе площадей.

ОТДѢЛЪ VII.

ОТДѢЛЪ VIII.

Рѣшеніе геометрическихъ задачъ въ полѣ.

ОТДѢЛЪ IX.

Поверхности и объемы тѣлъ.

ОТДѢЛЪ X.

ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ.

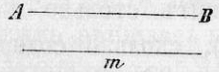
Стран.	Строки.	Напечатано:	Должно быть:
17	8 сверху	78^0 23,	78^0 23'
22	въ фиг. 36 пропущена прямая AB.		
42	надъ нижнею фиг.	фиг. 13	фиг. 65.
45	надъ фиг.	фиг. 74	фиг. 71.
48	поставлены по ошибкѣ § 53 и § 54.		
85	9 сверху	60	60^0
119	въ фиг. 128 между буквами *d* и A пропущена буква *f*.		
134	въ фиг. 148 пропущена діагональ BE.		
192	10 сверху	§ 167	§ 168
199	въ нижнемъ чертежѣ фиг. 238	буква B должна стоять у кола C и буква A у кола D.	
224	въ фиг. 261	у вершины конуса должна стоять буква L.	
225	11 сверху	Привычисленіи	При вычисленіи.
248	7 сверху	$158^{13}/_{16}$	$749^{13}/_{16}$
248	въ пирамидѣ (III) фиг. 281.	C	A.

ОТДѢЛЪ I.

Линіи и углы.

§ 1. Прямыя линіи. Отмѣтьте на бумагѣ карандашемъ двѣ какія-нибудь точки. Понятно, что отъ одной изъ нихъ до другой можно *провести*, т. е. прочертить, безчисленное множество линій, между которыми однако только одна можетъ быть кратчайшею; эта кратчайшая линія между двумя точками называется *прямою линіею* или просто *прямою*. Если у васъ проведено нѣсколько прямыхъ, то какъ отличить одну отъ другой? — Для этого вы ставите при оконечностяхъ прямой линіи буквы (обыкновенно большія буквы французской азбуки); такъ напримѣръ прямая (фиг. 1), у концевъ которой написаны буквы A и B, называется прямою AB. Прямую линію можно также назвать одною буквою; такъ напримѣръ подъ прямою AB начерчена прямая *m*. Если отъ точки A до B проведена прямая, то говорятъ: *точки A и B соединены между собою прямою линіею.*

фиг. 1.



§ 2. Для начертанія прямыхъ линій на бумагѣ употребляется чертежная линейка, которая, дѣлаемая обыкновенно изъ дерева, имѣетъ одинъ скошенный (срѣзанный) край. Чтобы чрезъ точки A и B, отмѣчанныя на бумагѣ, провести прямую, вы кладете линейку срѣзаннымъ краемъ плотно къ точкамъ A и B; потомъ, придерживая ее лѣвою рукою, вы двигаете правою рукою остро-очиненный карандашъ по срѣзанному краю такъ, чтобы оконечность карандаша скользила по бумагѣ.

Чтобы продолжить проведенную на бумагѣ прямую CD (фиг. 2) вправо отъ точки D, приложите линейку срѣзаннымъ краемъ къ прямой CD такъ, чтобы часть линейки пришлась вправо отъ точки D; потомъ прочертите прямую по срѣзанному краю отъ точки D вправо до конца линейки.

фиг. 2.

Плотники и столяры означаютъ прямыя линіи на доскахъ, брусьяхъ, бревнахъ слѣдующимъ образомъ: чтобы, напримѣръ, обтесать доску по направленію прямой линіи между точками A и B, плотникъ туго натягиваетъ на доскѣ шнуръ, намазанный мѣломъ, между двумя гвоздями, вколоченными въ точкахъ A и B; потомъ, приподнявъ шнуръ за его средину, плотникъ, быстро опускаетъ его на доску; тогда шнуръ, сильно ударяясь объ доску, оставляетъ на ней слѣдъ.

§ 3. *Измѣрить* какую-нибудь прямую AB значитъ: узнать, сколько разъ въ ней помѣщается какая-нибудь мѣра длины, напримѣръ сажень, аршинъ, футъ, вершокъ, дюймъ. Измѣривъ прямую CD, вы узнаете, на сколько саженъ (или аршинъ или вершковъ и т. д.) отстоитъ точка D отъ C, или вы узнаете разстояніе между точками C и D.

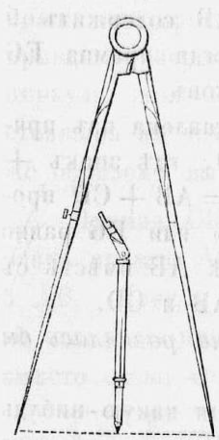
Предположите, что прямая CD содержитъ столько-же саженъ (или аршинъ или вершковъ и т. д.), сколько содержится саженъ (или аршинъ или вершковъ и т. д.) въ прямой AB; тогда говорятъ: *прямыя AB и CD равны между собою.*

Слова: *равенъ*, *равна*, *равно*, *равны* замѣняются въ письмѣ знакомъ $=$, который называется *знакомъ равенства.* Чтобы показать, что прямыя AB и CD равны, вы пишете $AB = CD$.

§ 4. *На прямой AF отмѣтить точку, коей разстояніе отъ точки A равнялось бы прямой CD* (фиг. 4).

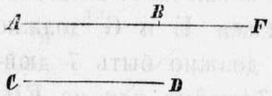
Для рѣшенія этого вопроса вы должны взять на помощь *циркуль* (фиг. 3). Циркуль, какъ вамъ, можетъ быть, извѣстно, состоитъ изъ двухъ остроконечныхъ ножекъ, верхняя часть которыхъ дѣлается изъ желтой мѣди, а нижняя изъ стали; чрезъ верхнюю часть обѣихъ ножекъ проходитъ шпинекъ, около котораго они свободно вращаются. Раздвинувъ ножки циркуля, вы назовете разстояніе между ихъ оконечностями *растворенiемъ* циркуля. Иногда въ циркулѣ стальная часть одной изъ ножекъ прикрѣпляется къ мѣдной части посредствомъ винтика. Ослабивъ этотъ винтикъ, вы можете вынуть стальную часть изъ мѣдной и въ пустоту мѣдной части вставить мѣдную трубочку, вмѣщающую въ себѣ карандашъ. Трубочку съ карандашемъ вы прикрѣпляете къ ножкѣ циркуля посредствомъ выше-упомянутаго винтика.

фиг. 3.



Приступите теперь къ рѣшенію заданнаго вопроса. Поставьте одну ножку* циркуля въ точкѣ C (фиг. 4), держа его за верхнюю часть, гдѣ ножки соединены шпинкомъ; потомъ, оставляя первую ножку въ точкѣ C, дайте циркулю такое раствореніе, чтобы его вторая ножка пришлась въ точку D. Не измѣняя раствореніе циркуля, поставьте его первую ножку въ точку A, а оконечностью второй ножки отмѣтьте точку B на прямой AF. Тогда на прямой AF вами найдена точка B, коей разстояніе отъ точки A равно прямой CD. При рѣшеніи этого вопроса вы *отложили* на прямой AF часть AB, равную прямой CD.

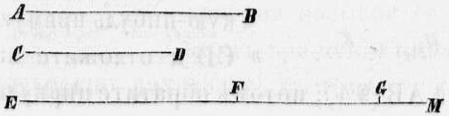
фиг. 4.



§ 5. *Провести прямую, коей длина равнялась бы прямой AB вмѣстѣ съ прямою CD* (фиг. 5.).

Проведите прямую EM произвольной длины и отложите на ней длину EF (§ 4), равную прямой AB, и потомъ отъ F до G длину, равную прямой CD.

фиг. 5.



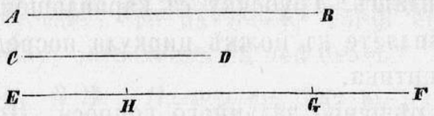
*

Тогда прямая EG равна прямой AB вмѣстѣ съ прямою CD. Для примѣра предположите, что прямая AB содержитъ 9 вершковъ и прямая CD — 5 вершковъ; тогда прямая EG должна содержать 9 и еще 5, или 14 вершковъ.

Чтобы показать, что прямая EG составлена изъ прямыхъ AB и CD, вы пишете $EG = AB + CD$, гдѣ знакъ + (плюсъ) замѣняетъ слова «вмѣстѣ съ»; $EG = AB + CD$ произносится: «EG равно AB вмѣстѣ съ CD» или EG равно AB плюсъ CD. Прямая EG, равная длинѣ AB вмѣстѣ съ длиною CD, называется *суммою* прямыхъ AB и CD.

§ 6. *Начертить прямую, коей длина равнялась бы прямой AB безъ прямой CD* (фиг. 6).

фиг. 6.

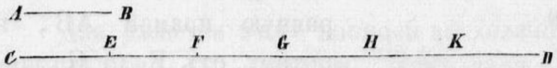


Проведя какую-нибудь прямую EF, вы отложите на ней длину EG, равную прямой AB, и потомъ отъ G до H длину, равную прямой CD (§ 4). Предположите, что прямая AB содержитъ 10 дюймовъ и прямая CD заключаетъ въ себѣ 7 дюймовъ; тогда разстояніе между точками E и G должно содержать 10 дюймовъ и въ прямой GH должно быть 7 дюймовъ. Понятно, что GH короче EG на 3 дюйма или на EH; слѣдовательно разстояніе EH равно прямой EG безъ прямой GH.

Напишите $EH = EG - GH$; это значитъ: прямая EH равна EG безъ GH, гдѣ знакъ — (минусъ) поставленъ вмѣсто слова «безъ». Вамъ извѣстно, что EG все равно, что AB, и GH все равно, что CD; слѣдовательно вы можете написать $EH = AB - CD$ вмѣсто $EH = EG - GH$. Прямая EH, равная длинѣ AB безъ длины CD, называется *разностью* прямыхъ AB и CD.

§ 7. *Начертить прямую, которая была-бы въ пять разъ длиннѣе прямой AB* (фиг. 7).

фиг. 7.

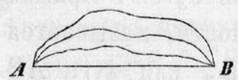


Проведите какую-нибудь прямую CD и отложите на ней длину CE, равную прямой AB (§ 4); потомъ обратите циркуль около ножки, стоящей въ точкѣ E, такъ, чтобы первая ножка его пришлась вправо отъ E. Отмѣтьте точку F, гдѣ пришлась первая ножка циркуля. Послѣ этого обратите циркуль около ножки, стоящей въ точкѣ F; тогда ножка, стоявшая въ точкѣ E, перейдетъ въ точку G. Точно такимъ-же образомъ вы получите точки H и K.

Прямая CK равна 5 прямымъ, изъ которыхъ каждая равна прямой AB; слѣдовательно вы можете написать $CK = 5\ AB$. Прямая CK содержитъ длину AB, взятую 5 разъ; по этому вы пишете $CK = 5 \times AB$, гдѣ знакъ × поставленъ вмѣсто слова «разъ».

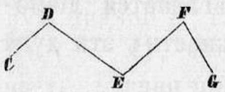
§ 8. Кривыя линіи. Окружность круга.

фиг. 8.



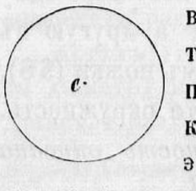
Вамъ уже извѣстно, что между двумя какими-нибудь точками (фиг. 8) можно провести очень много линій, но только одну прямую. Линіи, которыя отличаются отъ прямой, называются *кривыми*. Линія (фиг. 9), состоящая изъ нѣсколькихъ прямыхъ CD, DE, EF, FG, называется *ломанною*.

фиг. 9.



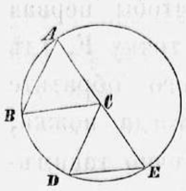
При разсмотрѣніи кривыхъ линій, вы должны познакомиться съ важнѣйшею изъ нихъ.

фиг. 10.



Ослабивъ винтикъ циркульной ножки (см. фиг. 3), выньте стальную часть и вмѣсто ея вставьте трубочку съ карандашемъ; потомъ завинтите винтикъ, чтобы трубочка прикрѣпилась къ циркулю. Поставьте постоянную ножку циркуля въ точку C (фиг. 10) и, держа циркуль за его верхнюю часть, вращайте его около точки C такъ, чтобы оконечность карандаша скользила по бумагѣ; тогда начертится кривая линія, которая называется *окружностью круга*. При этомъ вращеніи циркуля оконечность карандаша постоянно находилась въ томъ-же самомъ разстояніи отъ точки

фиг. 11.

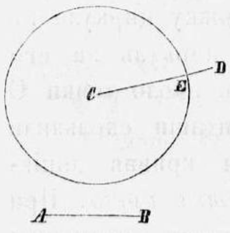


С; слѣдовательно точки A, B, D, E и т. д. (фиг. 11), чрезъ которыя прошла оконечность карандаша, равно удалены отъ точки С, т. е. прямыя АС, ВС, DC и т. д. равны между собою. Точка С называется *центромъ* окружности; прямыя СА, СВ, CD и т. д. суть *радіусы*. Чрезъ центръ С, между точками А и Е окружности, проведена прямая АЕ, которая называется *поперечникомъ* или *діаметромъ*. Радіусъ АС помѣщается два раза въ діаметрѣ АЕ; слѣдовательно діаметръ АЕ вдвое больше радіуса АС, или діаметръ АЕ равенъ удвоенному радіусу АС, т. е. АЕ = 2АС (§ 7).

Часть окружности между точками А и В (или между В и D, или между D и Е и т. д.) называется *дугою*. Прямая DE, соединяющая двѣ точки D и Е окружности, называется *хордою*. Дугѣ АВ принадлежитъ хорда АВ, или дуга АВ *стягивается* хордою АВ. Всякій діаметръ, какъ напримѣръ АЕ, есть хорда. Дуга ABDE, которая стягивается діаметромъ АЕ, составляетъ половину всей окружности; эта дуга называется *полуокружностью*.

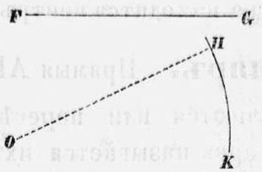
§ 9. *Начертить окружность такъ, чтобы ея центръ находился въ точкѣ С и ея радіусъ равнялся прямой АВ* (фиг. 12).

фиг. 12.



Чрезъ точку С проведите какую-нибудь прямую CD и на ней отложите часть СЕ, равную прямой АВ. Потомъ поставьте одну ножку циркуля въ точкѣ С, а другую въ точкѣ Е; наконецъ вращеніемъ ножки (§ 8), стоящей въ точкѣ С, начертите окружность. Тогда вы говорите: *окружность описана изъ точки С радіусомъ, равнымъ прямой АВ.*

фиг. 13.



Чтобы изъ точки О (фиг. 13) описать дугу радіусомъ, равнымъ прямой FG, поставьте одну ножку циркуля въ точкѣ F, а другую въ точкѣ G. Не измѣняя раствореніе циркуля, вы поставите одну ножку его въ точкѣ О и вращеніемъ этой ножки опишете другою ножкою дугу НК.

Прямую ОН вы провели *пунктирно*, потому-что эта линія, по окончаніи чертежа, совершенно лишняя; подобныя линіи называются *вспомогательными*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Сколько прямыхъ линій можно провести между двумя точками? — 2) Когда двѣ прямыя равны между собою? — 3) Прямыя АВ и CD равны; сколько сажень въ прямой АВ, когда прямая CD содержитъ 32 сажени? — 4) Что называется раствореніемъ циркуля? — 5) Какъ вы дадите циркулю раствореніе, равное прямой CD? — 6) Начерчена прямая ЕМ (фиг. 5), на которой вы отложили отъ Е до F часть, равную прямой m, отъ F до G часть, равную прямой n, и отъ G до М часть, равную прямой p; слѣдовательно прямая ЕМ = ? — 7) На прямой EF (фиг. 6), которая равна прямой m, отъ Е до G отложена часть, равная прямой n; слѣдовательно часть EG = ? — 8) Отъ Е до Н (фиг. 6) отложена часть, равная прямой a, отъ Н до F часть, равная прямой b, и отъ F до G часть, равная прямой c; слѣдовательно часть EG = ? — 9) Разстояніе EF (фиг. 6) равно 21 сажени, разстояніе FG = 5 саж. и разстояніе GH = 7 саженямъ; сколько сажень содержитъ разстояніе ЕН? — 10) Что такое окружность круга — центръ — радіусъ — діаметръ? — 11) Сколько вершковъ содержитъ діаметръ АЕ (фиг. 11), когда извѣстно, что радіусъ ВС = 6¼ вершка? — 12) Сколько футовъ содержитъ радіусъ колеса, когда діаметръ этого колеса равенъ 5½ футамъ[1]? — 13) Что такое дуга — хорда? — 14) Можно-ли діаметру или поперечнику дать еще другое названіе? — 15) Діаметръ раздѣляетъ окружность на — ? — 16) Окружность мо-

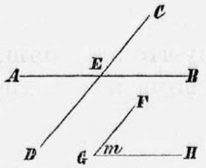
---

[1] Сажень содержитъ 7 футъ. Футъ содержитъ 12 дюймовъ. Сажень содержитъ 7-ю 12 дюймовъ, или 84 дюйма.

жетъ имѣть очень много хордъ; но наибольшія хорды ея должны пройти чрезъ....? — 17) Какъ называется одна изъ оконечностей радіуса? — 18) Въ какой точкѣ діаметра находится центръ?

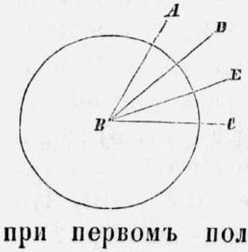
§ 10. Углы. Перпендикуляръ.

фиг. 14.



Прямыя AB и CD (фиг. 14) встрѣчаются или пересѣкаются въ точкѣ E, которая называется ихъ *точкою пересѣченія*. Пространство, находящееся между прямыми BE и CE, называется *угломъ*. Прямыя BE и CE, между которыми заключается уголъ, суть его *стороны*. Точка E пересѣченія сторонъ называется *вершиною* угла. Уголъ пишется тремя буквами, напримѣръ BEC, такъ, чтобы буква E, стоящая при вершинѣ, пришлась между буквами B и C, поставленными у сторонъ. Уголъ означается также одною буквою, напримѣръ *m*, поставленною между его сторонами у вершины. Пересѣченіемъ прямыхъ AB и CD образуются еще углы BED, AED и AEC.

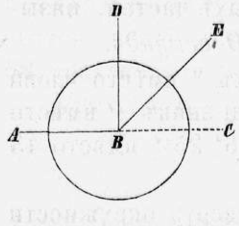
фиг. 15.



Изъ вершины B угла ABC (фиг. 15) опишите какую-нибудь окружность и предположите, что прямая AB можетъ обращаться около точки B точно такъ, какъ обращаются стрѣлки часовъ. Представьте себѣ, что прямая AB, послѣ обращенія около точки B, приняла положеніе BD; теперь эта подвижная прямая болѣе наклоняется къ прямой BC, нежели при первомъ положеніи ея, и составляетъ съ прямою BC уголъ DBC, который меньше угла ABC. Послѣ этого предположите, что подвижная прямая, вторичнымъ обращеніемъ, приняла положеніе BE; вслѣдствіе чего она еще больше наклоняется къ прямой BC и составляетъ съ этою прямою уголъ EBC, который меньше угла DBC. Теперь вамъ уже понятно, что уголъ, составляемый двумя прямыми, тѣмъ болѣе, чѣмъ наклоненіе этихъ прямыхъ менѣе, и на оборотъ: уголъ тѣмъ меньше, чѣмъ наклоненіе его сторонъ больше.

§ 11.

фиг. 16.



Представьте себѣ, что прямая AB (фиг. 16), послѣ обращенія около точки B, пришла опять въ свое первоначальное положеніе; тогда она совершила полный оборотъ. Если-же прямая AB, послѣ своего обращенія, приняла положеніе BC, находящееся на продолженіи ея первоначальнаго положенія, то она прошла полъ-оборота или полуокружность. Прямая AB, сдѣлавъ четверть оборота и принявъ положеніе BD, составляетъ съ первоначальнымъ положеніемъ своимъ уголъ ABD, который называется *прямымъ*. Понятно, что дуга, описанная изъ вершины прямаго угла между его сторонами, равна четверти окружности. Прямая BD, составляющая съ прямою AB прямой уголъ, *перпендикулярна* къ AB. Такъ-же прямыя BD и BC, составляющія прямой уголъ CBD, *взаимно-перпендикулярны*, т. е. прямая BD перпендикулярна къ BC, и прямая BC перпендикулярна къ BD.

Уголъ, какъ напримѣръ EBC, который меньше прямаго, называется *острымъ*. Напротивъ уголъ, который больше прямаго, называется *тупымъ*; такъ напримѣръ уголъ ABE тупой.

Равенство угловъ.

Два угла CEB и FGH (фиг. 14) называются *равными*, когда сторона FG на столько наклонена къ сторонѣ GH, на сколько сторона CE наклонена къ сторонѣ EB.

Уголъ ABC (фиг. 15) составленъ изъ угловъ ABD, DBE, CBE, или уголъ ABC равенъ ABD+DBE+CBE, т. е. уголъ ABC есть *сумма* угловъ ABD, DBE и CBE.

Если отъ угла DBC (фиг. 16) вы отдѣлите уголъ EBC, то останется уголъ DBE; слѣдовательно уголъ DBE=DBC—EBC, или уголъ DBE есть *разность* угловъ DBC и EBC.

§ 12. Раздѣленіе окружности.

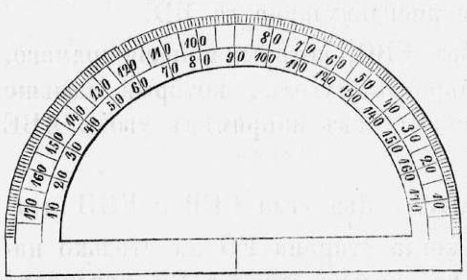
Принимается, что всякая окружность, большая или малая, содержитъ 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*. Величина градуса зависитъ отъ величины окружности, т. е. градусъ тѣмъ больше, чѣмъ окружность больше, и онъ тѣмъ меньше, чѣмъ окружность меньше. Градусъ содержитъ 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами;* минута содержитъ *60 секундъ.*

Для сокращенія письма ставится знакъ ° вмѣсто слова «градусъ», знакъ ′ вмѣсто слова «минута» и знакъ ″ вмѣсто слова «секунда». И такъ вы пишете: 43° 16′ 25″ вмѣсто 43 градуса 16 минутъ 25 секундъ.

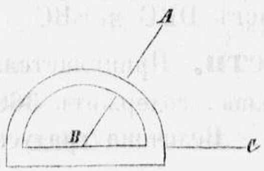
Полуокружность содержитъ 180 и четверть окружности 90 градусовъ. Такъ какъ между сторонами прямаго угла возможно описать изъ его вершины четверть окружности, то говорятъ: *прямой уголъ содержитъ 90 градусовъ.* Понятно, что острый уголъ долженъ содержать меньше 90°, а тупой больше 90 градусовъ.

§ 13. **Употребленіе транспортира.** *Транспортиръ* есть инструментъ, посредствомъ котораго узнается, сколько градусовъ содержитъ уголъ, начерченный на бумагѣ, и съ помощію котораго возможно начертить углы. Транспортиръ (фиг. 17) дѣлается въ видѣ полукруга изъ одного куска мѣди съ линеечкою, верхнее ребро которой есть діаметръ дуги транспортира; центръ этой дуги означается на линеечкѣ черточкою или выемкою. Наружная дуга транспортира раздѣляется черточками на 180 равныхъ частей (градусовъ). Черточки, которыя соотвѣтствуютъ десяткамъ градусовъ, подписываются цифрами, счетъ которымъ ведется отъ обоихъ концевъ діаметра транспортира.

фиг. 17.



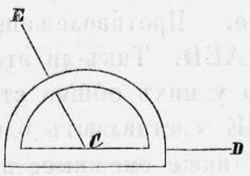
фиг. 18.



Чтобы узнать, сколько градусовъ въ углѣ ABC (фиг. 18), приложите транспортиръ діаметромъ къ сторонѣ BC такъ, чтобы центръ пришелся въ вершину B. Потомъ отсчитайте градусы отъ того конца діаметра, который лежитъ на сторонѣ BC, до черточки, находящейся на одной прямой съ стороною AB. Такъ, напримѣръ въ (фиг. 18), сторона AB пришлась подъ восьмою чертою послѣ цифры 50; стало быть уголъ ABC содержитъ 58 градусовъ.

При точкѣ C прямой CD начертить уголъ въ 117° (фиг. 19).

фиг. 19.



Приложите транспортиръ діаметромъ къ прямой CD и центромъ къ точкѣ C. Потомъ отъ того конца діаметра, который находится на прямой CD, отсчитайте 117° и отмѣтьте на бумагѣ точку на продолженіи черточки 117-го градуса. Наконецъ снимите транспортиръ и соедините отмѣчанную точку съ точкою C — получите уголъ ECD = 117°.

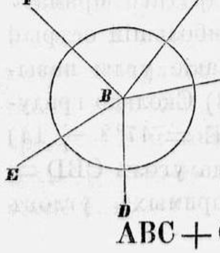
§ 14. **Смежные углы.** Продолживъ сторону AB угла ABC (фиг. 20) до какой-нибудь точки D, вы получите еще уголъ CBD. У этихъ угловъ сторона BC *общая*, т. е. она принадлежитъ каждому изъ угловъ ABC и CBD, а двѣ прочія стороны AB и BD составляютъ одну прямую линію; такіе углы называются *смежными*. Смежные углы ABC и CBD вмѣстѣ содержатъ 180°. Въ самомъ дѣлѣ, если вы изъ точки B опишете какую-нибудь окружность, то дуги, заключенныя между сторонами угловъ ABC и CBD, составляютъ полуокружность или 180°; слѣдовательно

$$ABC + CBD = 180^\circ.$$

фиг. 20.

Углы, расположенные около одной точки.

фиг. 21.



Около точки B (фиг. 21) начерчены углы ABC, CBD, DBE, EBF, ABF, которые вмѣстѣ составляютъ 360°.

Изъ точки B описавъ какую-нибудь окружность, вы замѣчаете, что дуги, принадлежащія начерченнымъ угламъ, составляютъ 360°; слѣдовательно

$$ABC + CBD + DBE + EBF + ABF = 360^\circ.$$

§ 15. Противолежащіе углы. Вамъ уже извѣстно (§ 10), что двумя пересѣкающимися прямыми AB и CD (фиг. 22) образуются четыре угла. Уголъ BED, стороны котораго суть продолженія сторонъ AE и CE, называется *противолежащимъ* относительно угла AEC; точно также углы BEC и AED суть противолежащіе. Противолежащіе углы равны, т. е. AEC=BED и BEC=AED. Такъ-ли это? Углы BED и BEC смежные, потому-что у нихъ общая сторона BE и двѣ прочія стороны DE и CE составляютъ одну прямую CD (§ 14). Углы BEC и AEC также смежные, потому-что у нихъ общая сторона CE и двѣ прочія стороны BE и AE составляютъ одну прямую AB. Смежные углы составляютъ 180°, т. е.

фиг. 22.

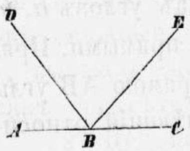
$$BEC+BED = 180^\circ \text{ и } BEC+AEC=180^\circ.$$

Здѣсь къ тому-же самому углу BEC вы прибавили: первый разъ уголъ BED, второй разъ уголъ AEC, и въ обоихъ случаяхъ получили 180°; значитъ: вы прибавили къ углу BEC по-ровну; слѣдовательно уголъ BED= углу AEC.

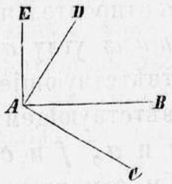
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Въ сколькихъ точкахъ пересѣкаются двѣ прямыя? — 2) Что такое уголъ — его вершина — его стороны? — 3) Какой уголъ называется прямымъ?—4) Что такое перпендикуляръ? — 5) Какой уголъ называется острымъ — тупымъ? — 6) Какіе углы называются равными? — 7) Что такое градусъ? — 8) Сколько минутъ въ градусѣ и сколько секундъ въ минутѣ? — 9) Сколько градусовъ содержитъ прямой уголъ? — 10) Можетъ-ли прямой уголъ быть больше или меньше другаго прямаго угла? — 11) Сколько градусовъ содержитъ наибольшій острый уголъ — наименьшій тупой уголъ? — 12) Какіе углы называются смежными — противолежащими? — 13) Сколько градусовъ въ углѣ EBC (фиг. 16), когда уголъ DBE = 47°? — 14) Сколько градусовъ въ углѣ ABC (фиг. 20), когда уголъ CBD = 57°? — 15) Сколько можетъ образоваться прямыхъ угловъ около точки B (фиг. 20) прямой AB? — 16) Сколько градусовъ содержитъ уголъ CBD (фиг. 20), когда извѣстно, что его дуга составляетъ 16-ую часть окружности? — 17) Уголъ CBD (фиг. 20) равенъ 72°; сколько такихъ-же угловъ можно начертить около точки B? — 18) Уголъ DBC = 105°43′ (фиг. 23) и уголъ ABD= углу EBC; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABD? — 19) Уголъ ABD = 43°26′ (фиг. 23) и уголъ DBE = 92°53′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ CBE? 20) Прямая AE (фиг. 24) перпендикулярна къ AB, прямая AD перпендикулярна къ AC и уголъ BAC = 52° 35′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ DAE? — 21) Въ (фиг. 24) уголъ DAE = 43° 43′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ EAC при перпендикулярности прямыхъ AE и AB, AD и AC? — 22) При перпендикулярности прямыхъ AE и AB, AD и AC (фиг. 24) уголъ DAB = 37° 15′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ EAC? — 23) Въ (фиг. 21) уголъ ABF = 80° 35′, ABC = 82° 34′, CBD = 107° 28′, EBD = 67° 48′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BEF? — 24) Въ (фиг. 21) уголъ ABC = EBF, EBD=ABF, EBF = 74° 36′ и EBD = 63° 47′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ CBD? — 25) Въ (фиг. 21) уголъ ABF = 57° 57′, EBD = 90°, CBD = 90° и EBF = ABC; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC? — 26) Въ (фиг. 22) уголъ BED = 38°42′; сколько градусовъ и минутъ содержатъ углы BEC, AEC и AED? 27) Въ (фиг. 22) AEC + BED = 83° 30′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ AED? — 28) При точкѣ A (фиг. 25) прямой BF начерчены углы BAC = 28°43′, CAD = 35°16, и продолженіями сторонъ BA и DA составленъ уголъ FAG; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ FAG? — 29) Въ (фиг. 25) чрезъ точку A прямой BF проведены прямыя CH, DG и AE; уголъ GAH = 32° 23′, FAH = 33° 53′ и DAE = 14° 52′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ EAF? — 30) Въ (фиг. 25) уголъ BAG ‖ 115° 24′, уголъ GAH равенъ половинѣ угла FAG и уголъ EAF= 93° 39′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ DAE?

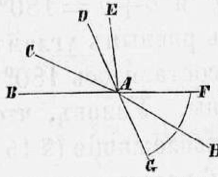
фиг. 23.



фиг. 24.

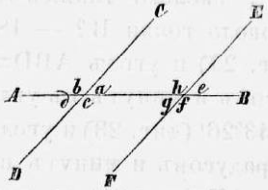


фиг. 25.



§ 16. Параллельныя линіи. Положеніе прямой CD (фиг. 26) относительно прямой AB тогда опредѣлено, когда извѣстенъ одинъ изъ угловъ a, b, c, d, составляемыхъ этими прямыми. Прямая EF составляетъ съ прямою AB углы e, f, g, h. Уголъ e, имѣющій относительно прямыхъ AB и EF такое-же положеніе, какое имѣетъ уголъ a относительно прямыхъ AB и CD, называется *соотвѣтствующимъ* углу a; точно также углы h и b, g и d, f и c суть соотвѣтствующіе. Если, напримѣръ, уголъ h равенъ своему соотвѣтствующему углу b, то непремѣнно соотвѣтствующіе углы e и a, f и c, g и d также равны. Въ самомъ дѣлѣ, углы h и e и также углы b и a смежные, а потому $h+e=180^0$ и $b+a=180^0$. Понятно, что здѣсь вы должны прибавить къ равнымъ угламъ h и b по-ровну, чтобы въ обоихъ случаяхъ составилось 180^0; слѣдовательно углы e и a должны быть равны. Узнавъ, что углы e и a равны, легко понять, что и противолежащіе (§ 15) имъ углы g и d равны. Наконецъ углы c и f равны, потому-что противолежащіе имъ углы b и h равны.

фиг. 26.



Если углы, составляемые прямыми EF и AB, равны соотвѣтствующимъ угламъ, составляемымъ прямыми CD и AB, то прямыя CD и EF равно-наклонены къ прямой AB, или прямыя CD и EF имѣютъ одно и то-же направленіе. Прямыя, какъ напримѣръ CD и EF, имѣющія одно и то-же направленіе, называются *параллельными;* эти прямыя никогда не встрѣчаются.

§ 17. Пересѣченіемъ параллельныхъ прямыхъ CD и EF прямою AB образуются: 1) углы a и h, лежащіе по одну сторону прямой AB и называющіеся *внутренними;* также углы c и g суть внутренніе; 2) внутренніе углы a и g, c и h, лежащіе по ту и другую сторону прямой AB и называющіеся *внутренно-перекрестными;* 3) внѣшніе углы (наружные) e и d, f и b, лежащіе по ту и другую сторону прямой AB и называющіеся *внѣшно-перекрестными*.

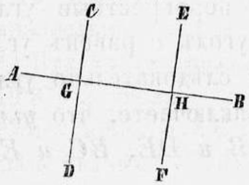
1) При параллельности прямыхъ CD и EF, *два внутренніе угла a и h (или c и g) вмѣстѣ составляютъ 180^0.* Въ самомъ дѣлѣ, углы e и h составляютъ 180^0, потому-что они смежные; но прибавляя къ углу h уголъ a вмѣсто угла e, вы также получите 180^0, потому-что углы e и a равны, какъ соотвѣтствующіе; слѣдовательно $a+h=180^0$.

2) При параллельности прямыхъ CD и EF, *внутренно-перекрестные углы a и g (или c и h) равны.* Углы e и a равны, какъ соотвѣтствующіе, и углы e и g равны, какъ противолежащіе (§ 15). Вы видите, что уголъ e равенъ углу a и въ то-же время онъ равенъ и углу g; но это возможно только въ такомъ случаѣ, когда углы a и g равны.

3) При параллельности прямыхъ CD и EF, *внѣшно-перекрестные углы e и d (или b и f) равны.* Углы d и g равны, какъ соотвѣтствующіе, и углы e и g равны, какъ противолежащіе (§ 15). Здѣсь уголъ g равенъ двумъ угламъ d и e — что возможно только тогда, когда углы d и e равны.

§ 18. Прямыя CD и EF параллельны (фиг. 27), потому что они проведены перпендикулярно къ прямой AB. Въ самомъ дѣлѣ, при точкѣ G прямыя AB и CD составляютъ прямые углы, потому-что эти прямыя взаимно-перпендикулярны; прямыя AB и EF составляютъ также прямые углы при точкѣ H; слѣдовательно углы EHB, BHF и т. д. равны своимъ соотвѣтствующимъ угламъ CGB, DGB и т. д., и прямыя CD и EF параллельны.

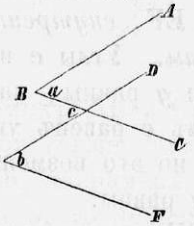
фиг. 27.



На оборотъ: если прямая AB перпендикулярна къ CD, и прямыя CD и EF параллельны, то прямая AB должна быть также перпендикулярна къ EF. Дѣйствительно, такъ какъ прямыя CD и EF параллельны, то соотвѣтствующіе углы должны быть равны; но при точкѣ G образовались только прямые углы, потому-что прямыя AB и CD взаимно-перпендикулярны; стало быть и при точкѣ H углы должны быть прямые, а это возможно только тогда, когда прямыя

EF и AB взаимно-перпендикулярны. Прямая GH, проведенная перпендикулярно къ параллельнымъ прямымъ CD и EF, называется *разстояніемъ* между этими параллельными.

Фиг. 28.



§ 19. Равенство угловъ, имѣющихъ параллельныя стороны. Начерчены два угла ABC и DEF (фиг. 28) такимъ образомъ, что сторона AB параллельна къ DE и сторона BC параллельна къ EF. Назовите уголъ ABC чрезъ a, уголъ DEF чрезъ b и уголъ, составляемый прямыми BC и ED, чрезъ c. Параллельныя прямыя AB и DE пересѣчены прямою BC точно такъ, какъ въ (фиг. 26) параллельныя прямыя CD и EF пересѣчены прямою AB. Въ (фиг. 26) вы узнали, что внутренно-перекрестные углы a и g равны; слѣдовательно по той-же причинѣ и въ (фиг. 28) внутренно-перекрестные углы a и c равны. Параллельныя прямыя BC и EF пересѣчены прямою DE точно такъ, какъ въ (фиг. 26) параллельныя прямыя CD и EF пересѣчены прямою AB; слѣдовательно внутренно-перекрестные углы b и c (фиг. 28) равны. Вы узнали, что уголъ c равенъ углу a и въ то-же время онъ равенъ углу b; слѣдовательно углы a и b должны быть равны. Откуда вы заключаете, что *углы ABC и DEF равны, когда стороны AB и DE, BC и EF параллельны.*

§ 20. Вертикальныя и горизонтальныя линіи. Изъ предъидущаго вы заключаете, что относительное положеніе двухъ прямыхъ можетъ быть троякое: наклонное (фиг. 22), перпендикулярное (фиг. 16) и параллельное (фиг. 26). Возьмите нить, къ концу которой привѣшана какая-нибудь тяжесть, и держите другой конецъ этой нити двумя пальцами такъ, чтобы она свободно опустилась; тогда она вытянется по *отвѣсной* или *вертикальной линіи*, или приметъ *вертикальное положеніе.* Нить съ привѣшанной къ ней тяжестью называется *нитью съ отвѣсомъ.* Всѣ прямыя, перпендикулярныя къ вертикальнымъ прямымъ, называются *горизонтальными.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

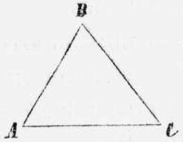
1) Назовите углы, соотвѣтствующіе угламъ a, b, c, d (фиг. 26). — 2) Какой уголъ противолежитъ углу b (фиг. 26)? — 3) Какой уголъ есть смежный углу f (фиг. 26)? — 4) Сколько градусовъ и минутъ содержитъ каждый изъ угловъ b, c, d (фиг. 26), когда уголъ $a = 78^{\circ}23$, ?—5) Какія прямыя называются параллельными? — 6) Какъ называются углы, составляемые прямою AB (фиг. 26) съ параллельными прямыми CD и EF? — 7) Назовите равные углы, составляемые прямою AB съ параллельными прямыми. — 8) Какому углу равняется уголъ f (фиг. 26) при параллельности прямыхъ CD и EF? — 9) Назовите углы, коихъ сумма равна 180° при параллельности прямыхъ CD и EF (фиг. 26)? — 10) Сколько градусовъ въ каждомъ изъ угловъ a, b, c, d, e, f, g, когда уголъ $h = 127^{\circ}$? — 11) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ c, когда уголъ $g = 65^{\circ}37'$? — 12) Будутъ-ли прямыя CD и EF параллельны, когда уголъ $e = 58^{\circ}46'$ и уголъ $b = 121^{\circ}14'$? — 13) Будутъ-ли прямыя CD и EF параллельны, когда уголъ $a = 67^{\circ}45'$ и уголъ $g = 63^{\circ}54'$? — 14) Будутъ-ли прямыя CD и EF параллельны, когда уголъ $c = 119^{\circ}37'$ и уголъ $g = 60^{\circ}20'$? — 15) Сколько образуется острыхъ угловъ прямою AB съ параллельными CD и EF — сколько тупыхъ угловъ? — 16) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC (фиг. 28), когда уголъ $DEF = 52^{\circ}25'$ и стороны AB и DE, BC и EF параллельны? — 17) Какое положеніе должна имѣть линія, образуемая пересѣченіемъ двухъ стѣнъ вашей комнаты? — 18) Въ какомъ положеніи находится вертикальная линія относительно горизонтальной?

ОТДѢЛЪ II.

Треугольники.

§ 21. **Треугольники.** Фигура, ограниченная тремя прямыми линіями, называется *треугольникомъ* (фиг. 29). Прямыя AB, AC и BC, которыми ограниченъ треугольникъ, суть его *стороны*. Точки A, B, C пересѣченія сторонъ называются *вершинами* треугольника. Треугольникъ означается буквами, поставленными у его вершинъ; въ (фиг. 29) начерченъ треугольникъ ABC или BAC или CAB.

Фиг. 29.

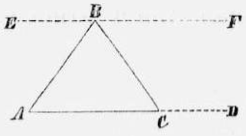


Всякій треугольникъ содержитъ шесть частей, т. е. три стороны и три угла.

Если всѣ три стороны треугольника равны, т. е. разстоянія между вершинами A, B и C равны, то онъ называется *равностороннимъ*. Представьте себѣ такой треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны, напримѣръ AB и BC, или AB и AC, или AC и BC; этакій треугольникъ называется *равнобедреннымъ*. Треугольникъ, въ которомъ нѣтъ равныхъ сторонъ, называется *разностороннимъ*. Сумма сторонъ треугольника называется его *периметромъ*; такъ напримѣръ AB + AC + BC есть периметръ треугольника ABC.

§ 22. **Сумма угловъ треугольника.** Начертите какой-нибудь треугольникъ ABC (фиг. 30) и вообразите, что чрезъ вершину B проведена прямая EF параллельно къ сторонѣ AC. Параллельныя прямыя EF и AC имѣютъ такое-же положеніе относительно BC, какое имѣютъ въ (фиг. 26) прямыя CD и EF относительно прямой AB; слѣдовательно въ (фиг. 30) образовались углы CBF и ACB, которые должны быть равны. Прямою AB съ тѣми-же параллельными EF и AC образовались углы (внутренно-перекрестные) ABE и BAC, которые равны. Углы ABE, ABC и CBF, образовавшіеся при точкѣ B, содержатъ вмѣстѣ 180° (§ 14), т. е. $CBF+ABC+ABE=180^\circ$; такъ какъ уголъ CBF = углу ACB, то вы можете написать уголъ ACB вмѣсто угла CBF — получите $ACB+ABC+ABE=180^\circ$. Вы знаете, что уголъ ABE = углу BAC; слѣдовательно вы можете написать уголъ BAC вмѣсто угла ABE — получите $ACB+ABC+BAC=180^\circ$. Что-же это значитъ? — Значитъ: *сумма угловъ треугольника составляетъ 180 градусовъ*.

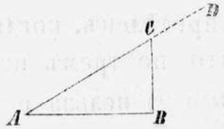
Фиг. 30.



Внѣшній уголъ треугольника. Продолженіемъ CD стороны AC треугольника ABC и прилежащею стороною BC образуется уголъ BCD, который называется *внѣшнимъ угломъ* треугольника ABC. Вамъ извѣстно, что $ACB + BCD = 180^\circ$, потому-что углы ACB и BCD смежные. Также извѣстно, что $ACB+ABC+BAC=180^\circ$. Вы видите, что къ углу ACB должно прибавить первый разъ уголъ BCD и второй разъ уголъ ABC вмѣстѣ съ угломъ BAC, чтобы въ обоихъ случаяхъ составилось 180°; но это возможно только тогда, когда вы прибавите къ углу ACB по-ровну; слѣдовательно уголъ BCD долженъ равняться углу ABC вмѣстѣ съ угломъ BAC, или $BCD = ABC + BAC$, т. е. *внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ противолежащихъ ему внутреннихъ угловъ*.

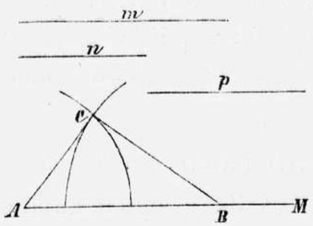
Прямоугольный треугольникъ Треугольникъ ACB, въ которомъ уголъ ABC прямой, называется *прямоугольнымъ*. Стороны AB и BC, которыми составленъ прямой уголъ ABC, суть *катеты*, а сторона AC, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузою*. Въ прямоугольномъ треугольникѣ уг. BAC + уг. $ACB = 90^\circ$, потому-что $BAC+ACB+ABC=180^\circ$ и уголъ $ABC=90^\circ$. Всякій треугольникъ, не содержащій прямаго угла, называется *косоугольнымъ*.

Фиг. 31.



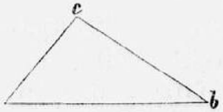
§ 23. **Равенство треугольниковъ.** Треугольникъ опредѣлится, т. е. всѣ его части сдѣлаются извѣстными, когда извѣстно положеніе его вершинъ.

Начертить треугольникъ, коего стороны равнялись бы прямымъ m, n, p *(фиг. 32).*



фиг. 32.

Проведя какую-нибудь прямую AM, отложите на ней часть AB, равную прямой m — получите двѣ вершины A и B треугольника. Разстояніе третьей вершины отъ вершины A должно равняться длинѣ n; слѣдовательно, чтобы найти положеніе третьей вершины, опишите дугу изъ точки A радіусомъ, равнымъ прямой n; третья вершина будетъ находиться гдѣ-нибудь на этой дугѣ, потому-что разстоянія вершины A до этой дуги равны длинѣ n. Вы знаете, что разстояніе третьей вершины отъ вершины B должно равняться длинѣ p, а потому вы начертите дугу, коей разстоянія отъ точки B равнялись бы прямой p; эту дугу вы опишете изъ точкн B радіусомъ, равнымъ прямой p. Такъ какъ третья вершина въ одно время должна находиться на двухъ дугахъ, то вы заключаете, что она помѣстится въ точкѣ C пересѣченія этихъ дугъ. Наконецъ соедините точки C и A прямою CA, и точки C и B прямою CB — получите треугольникъ ABC, въ которомъ сторона AB = m, сторона AC = n и сторона BC = p.

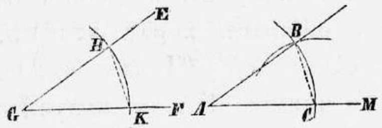


фиг. 33.

Такъ какъ треугольникъ совершенно опредѣленъ, когда его три стороны извѣстны, то понятно, что по тремъ извѣстнымъ сторонамъ (m, n и p) нельзя начертить два различные треугольника. Въ самомъ дѣлѣ, если вы начертите треугольникъ *abc* (фиг. 33) такъ, чтобы сторона *ab* равнялась AB, сторона *ac* равнялась AC и сторона *bc* равнялась BC, то треугольники *abc* и ABC равны, т. е. въ нихъ также уголъ *abc* = углу ABC, уголъ *bac* = углу BAC и уголъ *acb* = углу ACB. Откуда вы заключаете, что *два треугольника равны, когда три стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другаго.*

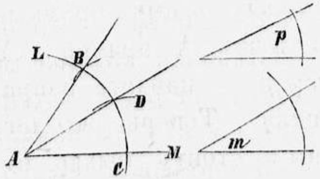
Въ треугольникахъ ABC и *abc* углы CAB и *cab*, коихъ стороны AC = *ac* и AB = *ab*, называются *соотвѣтствующими*; по той-же причинѣ углы ACB и *acb*, ABC и *abc* суть соотвѣтствующіе.

§ 24. *При точкѣ A прямой AM начертить уголъ, равный углу EGF* (фиг. 34).



фиг. 34.

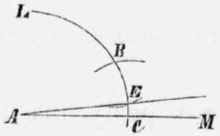
Изъ точки G опишите дугу какимъ-нибудь радіусомъ и изъ точки A тѣмъ-же самымъ радіусомъ еще дугу. Потомъ радіусомъ, равнымъ хордѣ HK опишите маленькую дугу изъ точки C; дуга CB пересѣкается маленькою дугою въ точкѣ B. Наконецъ соедините точки A и B прямою AB — получите уголъ BAC, равный углу EGF. Равны ли эти углы? Проведя хорды HK и BC, вы получите равные треугольники GHK и ABC. Почему эти треугольники равны? Потому-что прямыя AB, GH, AC, GK равны, какъ радіусы, равные одному и тому-же растворенію циркуля; кромѣ того хорды HK и BC равны, потому-что маленькая дуга описана радіусомъ, равнымъ разстоянію HK. Такъ какъ три стороны треугольника ABC равны тремъ сторонамъ треугольника GHK, то эти треугольники равны и слѣдовательно уголъ BAC = углу HGK.



фиг. 35.

Чтобы при точкѣ A прямой AM (фиг. 35) начертить уголъ, равный суммѣ угловъ m и p, опишите дуги однимъ и тѣмъ-же радіусомъ изъ точки A и вершинъ угловъ m и p. Изъ точки C опишите маленькую дугу радіусомъ, равнымъ хордѣ угла m; маленькая дуга пересѣчетъ дугу CL въ точкѣ D. Изъ точки D опишите еще маленькую дугу радіусомъ, равнымъ хордѣ угла p; эта маленькая дуга пересѣчетъ дугу CL въ точкѣ B. Наконецъ соедините точки B и A прямою BA — получите уголъ $BAC = m + p$. Вѣрно ли это? Проведя прямую DA, вы получите уголъ $DAC = m$ и уголъ $BAD = p$. Ясно, что уголъ $BAC = DAC + BAD$; слѣдовательно уголъ $BAC = m + p$.

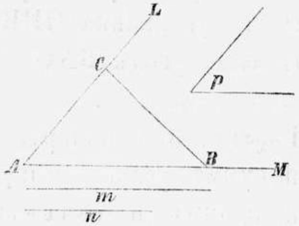
Фиг. 36.



Чтобы начертить уголъ, равный разности угловъ m и p, вы опишете дуги однимъ и тѣмъ-же радіусомъ изъ точки A и вершинъ угловъ m и p. Изъ точки C (фиг. 36) опишите маленькую дугу радіусомъ, равнымъ хордѣ угла m; эта дуга пересѣчетъ дугу CL въ точкѣ B. Изъ точки B опишите радіусомъ, равнымъ хордѣ угла p, еще маленькую дугу, которая пересѣчетъ дугу CL въ точкѣ E. Наконецъ соедините точки E и A прямою EA — получите уголъ $EAC = m - p$. Такъ-ли? Соединивъ точки B и A прямою BA, вы получите уголъ $BAC = m$; далѣе уголъ $BAE = p$ и уголъ $EAC = BAC - BAE$ или $EAC = m - p$.

§ 25. *Начертить треугольникъ такъ, чтобы одна сторона его равнялась прямой m, другая сторона прямой n и уголъ, заключенный между этими сторонами, равнялся углу p* (фиг. 37).

Фиг. 37.



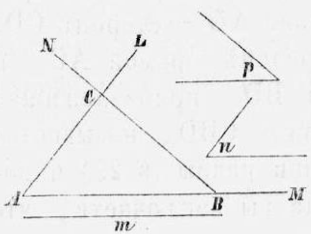
Проведите какую-нибудь прямую AM и отложите на ней часть AB, равную прямой m — получите вершины A и B треугольника. Какъ найти третью вершину? Наклоненіе стороны n къ сторонѣ AB извѣстно, потому-что между этими прямыми долженъ заключаться уголъ p. При точкѣ A прямой AM (§ 24) начертите уголъ, равный углу p — найдете направленіе AL второй стороны треугольника. Теперь уже легко найти положеніе третьей вершины; стоитъ только отложить длину n отъ A до C. Наконецъ соедините точки B и C прямою BC — получите треугольникъ ABC, въ которомъ сторона $AB = m$, сторона $AC = n$ и уголъ $BAC =$ углу p.

Вы видите, что по двумъ сторонамъ и углу, заключающемуся между ними, совершенно опредѣленъ треугольникъ. Начертите еще треугольникъ abc такъ, чтобы сторона ab равнялась AB, сторона ac равнялась AC и уголъ bac равнялся углу BAC; тогда треугольники abc и ABC равны, т. е. сторона $bc =$ BC, уголъ $abc =$ углу ABC и уголъ $acb =$ углу ACB, потому-что треугольникъ abc составленъ точно такимъ-же образомъ, какъ и треугольникъ ABC. Откуда вы заключаете, что *два треугольника равны, когда двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другаго треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны.*

§ 26. *Начертить треугольникъ такъ, чтобы одна сторона его равнялась прямой m и углы, прилежащіе къ этой сторонѣ, равнялись: одинъ углу n и другой углу p* (фиг. 38).

Проведите какую-нибудь прямую AM и отложите на ней часть AB, равную прямой m; этимъ опредѣлятся двѣ вершины A и B треугольника. Направленіе второй стороны извѣстно, потому-что она составляетъ уголъ n съ прямою AB. Чтобы найти направленіе этой стороны, вы начертите при точкѣ A прямой AB уголъ BAL, равный углу n. Понятно, что третья вершина треугольника должна находиться на прямой AL. Направленіе третьей стороны треугольника также извѣстно, потому-что она составляетъ съ стороною AB уголъ p. При точкѣ B прямой AB начертивъ уголъ ABN, равный углу p, вы найдете направленіе BN третьей стороны. Очевидно, что третья вершина треугольника должна также находиться на прямой BN. Такъ какъ третья вершина въ одно и то-же время должна находиться на двухъ прямыхъ AL и BN, то она непремѣнно помѣстится въ точкѣ пересѣченія C этихъ прямыхъ.

Фиг. 38.

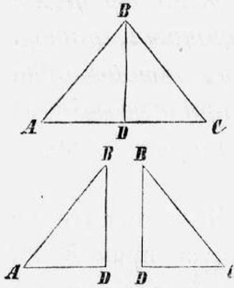


Вы видите, что по извѣстной сторонѣ и двумъ къ ней прилежащимъ угламъ треугольникъ совершенно опредѣленъ. На этомъ основаніи треугольникъ *abc*, коего сторона *ab* = сторонѣ AB, уголъ *bac* = углу BAC и уголъ *abc* = углу ABC, совершенно равенъ треугольнику ABC. Откуда вы заключаете, что *два треугольника равны, когда сторона одного равна сторонѣ другаго треугольника и соотвѣтствующіе углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, равны.*

§ 27. Равнобедренный треугольникъ.

Представьте себѣ равнобедренный треугольникъ ABC (фиг. 39), въ которомъ стороны AB и BC равны, и что чрезъ средину D неравной стороны AC и противолежащую ей вершину B проведена прямая DB. Этою прямою въ треугольникѣ ABC образовались два равные треугольника ABD и CBD. Равны-ли эти треугольники? — Сторона AB = сторонѣ BC, какъ равныя стороны равнобедреннаго треугольника ABC, сторона AD = сторонѣ CD, потому-что точка D находится на срединѣ прямой AC, и сторона BD = сторонѣ BD (сторона BD, принадлежащая треугольнику ABD и также треугольнику CBD, называется *общею*), слѣдовательно эти треугольники равны (§ 23) и потому уголъ BAC = углу ACB. Откуда вы заключаете, что *въ равнобедренномъ треугольникѣ противъ равныхъ сторонъ (AB и BC) находятся равные углы (ACB и BAC).*

Фиг. 39.



Такъ какъ треугольники ABD и CBD равны, то и углы ADB и CDB должны быть равны; но эти смежные углы только тогда могутъ быть равны, когда они прямые, а они прямые въ такомъ случаѣ, когда прямая BD перпендикулярна къ AC; слѣдовательно *прямая BD, соединяющая средину D неравной стороны равнобедреннаго треугольника съ противолежащею вершиною B, должна быть перпендикулярна къ этой сторонѣ.*

Такъ какъ треугольники ABD и CBD равны, то и углы ABD и CBD равны; но эти углы суть части угла ABC, слѣдовательно уголъ ABC состоитъ изъ двухъ равныхъ частей, или уголъ ABD (также уголъ CBD) есть половина угла ABC. Откуда вы заключаете, что *прямая BD, соединяющая средину D неравной стороны AC равнобедреннаго треугольника съ противолежащею вершиною B, раздѣляетъ неравный уголъ ABC на двѣ равныя части.*

Въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 31) противъ равныхъ сторонъ AB и BC находятся равные углы ACB и BAC. Извѣстно (§ 22), что эти два равные угла вмѣстѣ содержатъ 90°; слѣдовательно каждый изъ нихъ равенъ 45°, т. е. *въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ острыхъ угловъ равенъ 45°.*

Равносторонній треугольникъ. Предположите, что треугольникъ ABC (фиг. 39) равносторонній. Вы уже знаете, что противъ равныхъ сторонъ AB и BC лежатъ равные углы ACB и BAC, и противъ равныхъ сторонъ AB и AC находятся равные углы ACB и ABC. Стало быть уголъ ACB долженъ равняться углу BAC и углу ABC, а это возможно только тогда, когда эти три угла равны; слѣдовательно *въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ три угла равны.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

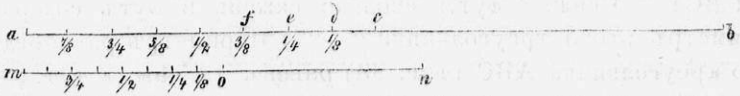
1) Изъ сколькихъ частей состоитъ треугольникъ? — 2) Какой треугольникъ называется разностороннимъ — равнобедреннымъ — равностороннимъ? — 3) Что такое периметръ треугольника? — 4) Какъ называются стороны прямоугольнаго треугольника? — 5) Сколько градусовъ въ углѣ ABC (фиг. 39) равносторонняго треугольника? — 6) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (фиг. 39) сторона AC = 2 саж. 5 фут. и AB (или BC) = 3 саж. 3 фут.; сколько сажень и футъ содержитъ периметръ этого треугольника? — 7) Периметръ равнобедреннаго треугольника ABC (фиг. 39) равенъ 12 саж. 2 фут., сторона AC = 3 саж. 5 фут. и AB = BC; сколько сажень и футъ

въ сторонѣ AB? — 8) Периметръ равнобедреннаго треугольника (фиг. 39) равенъ 30 саж. 3 фут., сторона AB = BC и сторона AB = 9 саж. 5 фут.; сколько сажень и футъ въ сторонѣ AC? — 9) Въ равностороннемъ треугольникѣ одна изъ сторонъ равна 5 саж. 6 фут.; сколько сажень и футъ содержитъ его периметръ? — 10) Въ разностороннемъ треугольникѣ ABC сторона BC = 7 саж. 2 ар., сторона AB = 8 саж. 2 ар. и сторона AC = 11 саж. 1 ар.; сколько сажень и аршинъ содержитъ периметръ? — 11) Почему въ прямоугольномъ треугольникѣ не можетъ быть болѣе одного прямаго угла? — 12) Можетъ-ли прямоугольный треугольникъ быть равнобедреннымъ — равностороннимъ? — 13) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 31) катеты равны; сколько градусовъ содержитъ уголъ BAC? — 14) Сколько градусовъ содержитъ сумма острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника? — 15) Сколько градусовъ содержитъ уг. BAC (фиг. 31), когда уг. BCD равенъ 126°? — 16) Сколько можетъ быть тупыхъ угловъ въ треугольникѣ? — 17) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 31) уголъ ACB = 37°48′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BAC? — 17) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона AB = BC и уголъ ACB = 72°35′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BAC? — 19) Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ CBM (фиг. 38), когда уголъ ACB = 53°35′ и уголъ BAC = 37°37′? — 20) Когда два равносторонніе треугольника равны? — 21) Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ BCD (фиг. 31), когда острый уголъ BAC прямоугольнаго треугольника равенъ 23° 32′? — 22) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона AB = BC и уголъ ABC = 54°27′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ACB? — 23) Въ равностороннемъ треугольникѣ ABC сторона AC продолжена до точки D; сколько градусовъ содержитъ уголъ BCD? — 24) Начертите какой-нибудь равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы уголъ ABD (фиг. 39) равнялся 29°, сторона AB равнялась BC. — 25) Начертите [1]) равнобедренный треугольникъ такъ,

---

1) Въ фиг. 40 проведена прямая *ab*, на которой отложены части *ac* и *cb*, длиною въ 1 вершокъ; вершокъ *ac* раздѣленъ на 8 равныхъ частей; слѣдова-

фиг. 40.

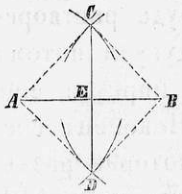


тельно $cd = {}^1/_8$, $ce = {}^1/_4$, $cf = {}^3/_8$, $bd = 1^1/_8$, $be = 1^1/_4$, $bf = 1^3/_8$ вершка

чтобы сторона AC равнялась $1^1/_4$ вершка, сторона AB равнялась BC и уголъ BAC равнялся 25°. — 26) Начертите треугольникъ (фиг. 38), въ которомъ уголъ BAC = 43°, уголъ ABC = 67° и сторона AB = $^7/_8$ вершка. — 27) Въ (фиг. 30) прямая EF параллельна къ AC, уголъ CBF = 52°25′ и уголъ BAC = 88°38′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC? — 28) Начертите треугольникъ (фиг. 37), въ которомъ сторона AB = $1^1/_2$ дюйма, сторона AC = $1^1/_8$ дюйма и уголъ BAC = 48°. — 29) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ BAC = углу ACB и уголъ ABC вдвое больше угла BAC; сколько градусовъ въ углѣ ABC? — 30) Начертите равносторонній треугольникъ, въ которомъ сторона равна $1^3/_8$ дюйма. — 31) Начертите равнобедренный треугольникъ, въ которомъ AB = BC, сторона AC = $1^1/_2$ дюйма и сторона AB = $^7/_8$ дюйма. — 32) Начертите треугольникъ ABC, въ которомъ сторона AB = $1^1/_2$ дюйма, сторона AC = $1^3/_4$ дюйма и сторона BC = $1^7/_8$ дюйма. — 33) Начертите равнобедренный треугольникъ (фиг. 39), въ которомъ AB = BC, уголъ ABC = 98° и сторона AB = $^3/_4$ дюйма. — 34) Начертите треугольникъ ABC (фиг. 38), въ которомъ сторона AB = $1^3/_8$ дюйма, уголъ BAC = 37° и уголъ ABC = 106°. —

§ 28. *Прямую AB раздѣлить по-поламъ* (фиг. 41).

фиг. 41.



Изъ точки A опишите какимъ-нибудь радіусовъ двѣ дуги: одну надъ и другую подъ прямою AB. Тѣмъ-же самымъ радіусомъ опишите изъ точки B двѣ дуги такъ, чтобы они пересѣклись съ первыми дугами, и потомъ соедините точки пересѣченія дугъ прямою CD; эта прямая раздѣляетъ прямую AB въ точкѣ E на двѣ равныя части AE и BE.

Такъ-ли? Проведите прямыя AC, BC, AD и BD — у васъ образуются два равные треугольника ACD и BCD (три

и т. д. На прямой *mn* отложены части *mo* и *on*, длиною въ 1 дюймъ, и дюймъ *mo* раздѣленъ на 8 равныхъ частей.

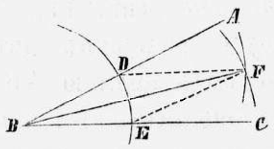
Для рѣшенія вопроса (25) вы проведете какую-нибудь прямую AM и на ней отложите часть AC, равную $1^1/_4$ вершка или разстоянію отъ *b* до черточки, подписанной числомъ $^1/_4$; потомъ съ помощіею транспортира начертите уголъ въ 25° при точкѣ A прямой AC.

стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другаго), въ которыхъ сторона CD общая и стороны AC, BC, AD и BD равны (какъ равные радіусы дугъ); слѣдовательно (§ 23) уголъ ACD долженъ равняться углу BCD. Также треугольники ACE и BCE равны (§ 25), потому-что сторона CE общая, стороны AC и BC равны и углы ACD и BCD равны; слѣдовательно въ этихъ равныхъ треугольникахъ (двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго и углы, заключенные между этими сторонами равны) стороны AE и BE равны, т. е. точка E находится на срединѣ прямой AB.

Чтобы прямую AB раздѣлить на 4 равныя части, вы раздѣлите ее сперва прямою CD на двѣ равныя части и потомъ раздѣлите каждую половину на двѣ равныя части. Постепенно раздѣляя прямую AB на 2, на 4 равныя части, вы можете ее раздѣлить на 8 и на 16 равныхъ частей.

§ 29. *Уголъ ABC раздѣлить на двѣ равныя части* (фиг. 42).

Фиг. 42.



Изъ вершины B опишите дугу какимъ-нибудь радіусомъ; эта дуга пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ D и E. Изъ точки D какимъ-нибудь раствореніемъ циркуля опишите дугу и потомъ изъ точки E тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля еще дугу; эти двѣ дуги пересѣкутся въ точкѣ F. Наконецъ соедините вершину B съ точкою F прямою BF, которая раздѣлитъ уголъ ABC по-поламъ или на два равные угла ABF и CBF.

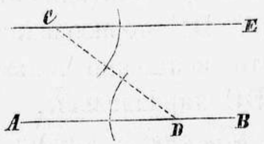
Для объясненія вѣрности этого рѣшенія проведите прямыя DF и EF — получите два равные треугольника BDF и BEF, въ которыхъ стороны BD и BE равны, какъ радіусы дуги DE, стороны DF и EF равны, потому-что они равны одному и тому-же растворенію циркуля, и сторона BF общая. Такъ какъ треугольники BDF и BEF равны (§ 23, потому-что три стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другаго), то соотвѣтствующіе углы ABF и CBF должны быть равны.

Раздѣленіемъ угла ABF по-поламъ и потомъ угла CBF по-поламъ вы раздѣлите уголъ ABC на четыре равныя части. Точно такимъ-же образомъ вы можете раздѣлить уголъ ABC на 8, на 16 равныхъ частей.

§ 30. *Чрезъ точку C провести прямую параллельно къ прямой AB* (фиг. 43).

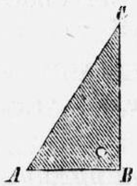
Чрезъ точку C проведите какую-нибудь прямую CD до пересѣченія съ прямою AB. Потомъ при точкѣ C прямой CD начертите уголъ, равный углу ADC, какъ показано было въ § 24. Сторона CE начерченнаго угла параллельна къ прямой AB. Въ самомъ дѣлѣ, прямая CD составляетъ съ прямыми AB и CE углы ADC и ECD, которые, по своему положенію относительно этихъ прямыхъ, суть внутренно-перекрестные. Начертивъ уголъ DCE, равный углу ADC, вы получили равные перекрестные углы, но эти углы равны только въ такомъ случаѣ, когда прямыя AB и CE параллельны.

Фиг. 43.

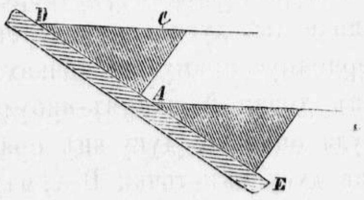


Для начертанія на бумагѣ параллельныхъ линій употребляется обыкновенно линейка съ *чертежнымъ треугольникомъ*. У чертежнаго треугольника (фиг. 44) два смежные края AB и BC составляютъ прямой уголъ, а край AC (гипотенуза), противолежащій прямому углу дѣлается скошеннымъ (срѣзаннымъ); чертежный треугольникъ дѣлается обыкновенно изъ дерева.

Фиг. 44.



Фиг. 45.

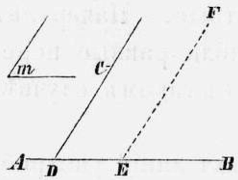


Чтобы чрезъ точку C провести прямую параллельно къ прямой AB (фиг. 45), приложите чертежный треугольникъ гипотенузою къ прямой AB. Придерживая его правою рукою, вы приложите линейку краемъ къ его катету. Потомъ придержите линейку лѣвою рукою, а правою рукою подвигайте треугольникъ по краю линейки вверхъ (или внизъ) до тѣхъ поръ, пока гипотенуза закроетъ точку C. Наконецъ по гипотенузѣ проведите прямую DC чрезъ точку C.

Прямая DC параллельна къ AB. Дѣйствительно, прямая DE составляетъ съ прямыми AB и DC углы EAB и ADC, которые по своему положенію относительно этихъ прямыхъ, суть соотвѣтствующіе (§ 17); эти углы равны, потому-что тотъ-же самый уголъ при первомъ положеніи чертежнаго треугольника названъ чрезъ EAB, а при второмъ положеніи чрезъ ADC. Итакъ при точкахъ прямой DE образовались два равные соотвѣтствующіе угла — что возможно только въ такомъ случаѣ, когда прямыя AB и DC параллельны.

§ 31. *Чрезъ точку C провести прямую, которая составила бы съ прямою AB уголъ, равный углу m* (фиг. 46).

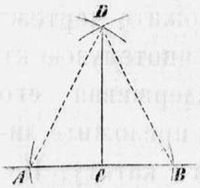
Фиг. 46.



При какой-нибудь точкѣ E начертите уголъ BEF, равный углу *m* (§ 24) и потомъ чрезъ точку C проведите прямую CD параллельно къ прямой EF; прямая CD составляетъ съ прямою AB уголъ BDC, равный углу *m*. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ BEF = углу *m* и также уголъ BEF = углу BDC (какъ соотвѣтствующіе углы, образовавшіеся прямою AB съ параллельными прямыми DC и EF. Уголъ BEF = углу *m* и въ то-же время онъ равенъ углу BDC, слѣдовательно углы *m* и BDC должны быть равны.

Чрезъ точку C какой-нибудь прямой провести прямую такъ, чтобы эти прямыя были взаимно-перпендикулярны (фиг. 47).

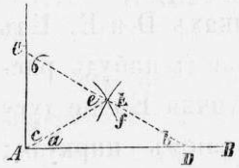
Фиг. 47.



Изъ точки C тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля опишите двѣ дуги такъ, чтобы они пересѣкли начерченную прямую въ точкахъ A и B. Потомъ изъ точки A какимъ-нибудь раствореніемъ циркуля опишите дугу внѣ прямой AB и такую-же дугу изъ точки B тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля; двѣ послѣднія дуги пересѣкутся въ точкѣ D. Наконецъ соедините точки D и C прямою DC, которая должна быть перпендикулярна къ прямой AB. Такъ-ли это? Проведя прямыя AD и BD, вы получите два равные треугольника ADC и BDC, въ которыхъ стороны AD и BD равны, какъ радіусы, равные тому-же раствоpенію циркуля, стороны AC и BC равны, какъ равные радіусы, и сторона CD общая. По равенству этихъ треугольниковъ (§ 23), въ нихъ углы ACD и BCD должны быть равны; но эти смежные углы только тогда равны, когда они прямые, или когда прямая DC перпендикулярна къ прямой AB.

Чрезъ оконечную точку A прямой AB провести перпендикуляръ къ этой прямой (фиг. 48).

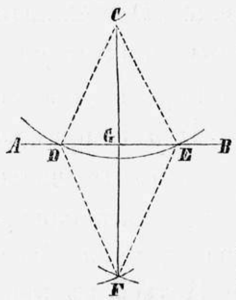
Фиг. 48.



Изъ произвольной точки D опишите дугу и тѣмъ-же раствореніемъ циркуля еще дугу изъ точки A; эти дуги пересѣкутся въ точкѣ E. Соедините точки D и E прямою DE и на ея продолженіи отложите часть EC, равную прямой DE. Наконецъ соедините точки C и A прямою CA, которая должна быть перпендикулярна къ прямой AB. Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого рѣшенія, соедините точки A и E прямою AE. Прямыя AE и DE равны, какъ радіусы, равные тому-же самому растворенію циркуля; также прямыя CE и DE равны. Такъ какъ прямая DE въ одно и то-же время равна AE и равна CE, то вы заключаете, что прямыя AE и CE равны; слѣдовательно треугольники ADE и ACE равны. Уголъ *e*, какъ внѣшній уголъ треугольника ADE, равенъ суммѣ двухъ противолежащихъ ему внутреннихъ угловъ *a* и *b* (§ 22), т. е. $e = a + b$; но углы *a* и *b* равны, потому-что они лежатъ противъ равныхъ сторонъ DE и AE (§ 27); слѣдовательно $a + b = 2a$ и $e = 2a$. Уголъ *f*, какъ внѣшній уголъ треугольника AEC, равенъ суммѣ угловъ *c* и *d* (§ 22), т. е. $f = c + d$, или уголъ *f* равенъ удвоенному углу c, т. е. $f = 2c$, потому-что углы c и d равны, какъ противолежащіе равнымъ сторонамъ CE и AE. Откуда вы узнаете, что сумма угловъ e и f равна суммѣ удвоенныхъ угловъ a и c, т.е. $e+f=2a+2c$; но углы e и f вмѣстѣ составляютъ 180°, т. е. $e+f=180^\circ$, потому-что эти углы смежные; слѣдовательно удвоенные углы a и c вмѣстѣ составляютъ также 180°, или $2a+2c=180^\circ$; откуда углы a и c вмѣстѣ содержатъ половину 180 градусовъ или $a+c=90^\circ$. Узнавъ, что уголъ CAD, равный суммѣ угловъ a и c, содержитъ 90°, вы заключаете, что прямая CA перпендикулярна къ прямой AB.

§ 32. *Чрезъ точку C, находящуюся внѣ прямой AB, провести перпендикуляръ къ этой прямой* (фиг. 49).

Фиг. 49.



Изъ точки C опишите какимъ-нибудь раствореніемъ циркуля дугу, которая пересѣчетъ прямую AB въ точкахъ D и E. Изъ точки D опишите дугу какимъ-нибудь раствореніемъ циркуля и изъ точки E еще дугу тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля; двѣ послѣднія дуги пересѣкутся въ точкѣ F. Наконецъ соедините точки C и F прямою CF, которая должна быть перпендикулярна къ прямой AB.

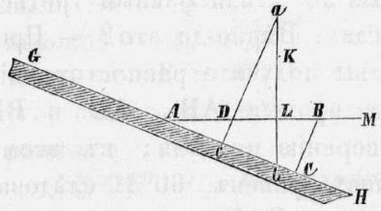
Чтобы объяснить вѣрность этого рѣшенія, проведите прямыя CD и CE — образуется уголъ DCE, который прямою CF раздѣленъ по-поламъ. Въ самомъ дѣлѣ, вы поступили съ угломъ DCE точно такъ, какъ при рѣшеніи вопроса въ (§ 29) т. е. вы описали изъ вершины C (фиг. 49) дугу DE, потомъ изъ точекъ D и E двѣ дуги и наконецъ вы соединили точку пересѣченія F этихъ дугъ съ точкою C прямою FC. Теперь легко объяснить, что треугольники CDG и CEG равны (§ 25), потому-что стороны CD и CE равны, какъ радіусы дуги DE, сторона CG общая и углы DCG и ECG равны, потому-что каждый есть половина угла DCE; въ этихъ равныхъ треугольникахъ (двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другаго и углы, заключенные между этими сторонами, равны) углы CGD и CGE должны быть равны; но эти смежные углы только тогда равны, когда они прямые, или когда прямая CG перпендикулярна къ прямой AB.

Если перпендикуляръ проведенъ чрезъ точку, находящуюся на прямой, то онъ *возставленъ* къ этой прямой; такъ напримѣръ въ (фиг. 47) вы *возставили* перпендикуляръ къ прямой AB изъ точки C, находящейся на AB. Если-же перпендикуляръ проведенъ чрезъ точку, находящуюся внѣ прямой, то онъ *опущенъ* на эту прямую; такъ напримѣръ въ (фиг. 49) вы *опустили* перпендикуляръ на эту прямую.

Кратчайшее разстояніе какой-нибудь точки C (фиг. 49) до прямой AB есть перпендикуляръ CG, опущенный изъ C на AB, потому-что въ прямоугольномъ треугольникѣ (CDG) катетъ (CG) всегда короче гипотенузы (CD).

Для начертанія перпендикулярныхъ линій съ пользою употребляются линейка и чертежный треугольникъ. Чтобы изъ точки K (фиг. 50) опустить перпендикуляръ на прямую AM, приложите чертежный треугольникъ гипотенузою къ прямой AM, а линейку краемъ GH къ катету AC (см. фиг. 45). Придерживая линейку лѣвою рукою и снявъ треугольникъ съ бумаги, вы приложите его другимъ катетомъ къ краю линейки. Потомъ подвиньте треугольникъ по краю неподвижной линейки до тѣхъ поръ, пока гипотенуза треугольника пройдетъ чрезъ точку K. Наконецъ придерживая треугольникъ, вы проведете прямую KL чрезъ точку K по гипотенузѣ. Будетъ-ли прямая KL перпендикулярна къ AM? — Отъ перемѣщенія чертежнаго треугольника прямой уголъ ACB принялъ положеніе *acb* и острый уголъ BAC перемѣстился

Фиг. 50.



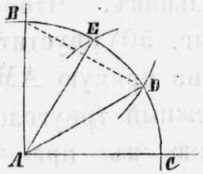
въ *bac*. Углы треугольниковъ *a*DL и AD*c* подлежатъ особому разсмотрѣнію; уг. DA*c* (или BAC) = уг. L*a*D (или *bac*), уг. AD*c* = уг. *a*DL, какъ противолежащіе углы, и уголъ A*c*D прямой, потому-что смежный ему уголъ *acb* прямой; слѣдовательно треугольникъ AD*c* прямоугольный и уг. DA*c* + AD*c* = 90°. На этомъ основаніи углы L*a*D и *a*DL, равные угламъ DA*c* и AD*c*, также составляютъ 90°; въ такомъ случаѣ третій уголъ *a*LD треугольника DL*a* долженъ содержать 90°; слѣдовательно прямая *a*L перпендикулярна къ AB.

Точно такимъ-же образомъ возставляются перпендикуляры съ помощію линейки и треугольника.

§ 33. *Прямой уголъ раздѣлить на три равныя части* (фиг. 51).

Изъ вершины A опишите дугу такъ, чтобы она пересѣкла стороны прямаго угла въ точкахъ B и C. Тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля опишите дугу изъ точки B такъ, чтобы получилась точка D. Соедините точки A и D прямою AD — получите уголъ CAD равный 30°, или равный третьей части прямаго угла. Вѣрно-ли это? — Проведя хорду BD, вы получите равносторонній треугольникъ ABD, потому-что прямыя AB, AD и BD равны одному и тому-же раствору циркуля; въ этомъ треугольникѣ каждый изъ угловъ равенъ 60°; слѣдовательно уголъ DAC, равный BAC безъ BAD, или равный 90° безъ 60°, содержитъ 30°. Изъ точки C радіусомъ, равнымъ прямой AD, опишите дугу, которая пересѣчетъ дугу прямаго угла въ точкѣ E. Соедините точки A и E прямою AE — получите уголъ BAE, равный 30°; слѣдовательно и уголъ DAE = 30°.

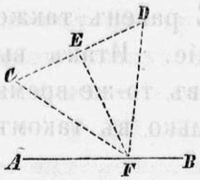
Фиг. 51.



§ 34. *На прямой AB найти точку, равно-отстоящую отъ точекъ C и D, лежащихъ внѣ этой прямой* (фиг. 52.)

Соедините точки C и D прямою CD и дѣлите ее въ точкѣ E по-поламъ. Изъ точки E къ прямой CD возставьте перпендикуляръ до пересѣченія F съ прямою AB; точка F равно-отстоитъ отъ точекъ C и D. Такъ-ли? — Проведя прямыя CF и DF, вы получите два равные треугольника (§ 25), потому-что CE = DE, сторона EF общая и уголъ CEF = углу DEF, какъ прямые углы; слѣдовательно разстояніе CF равно разстоянію DF.

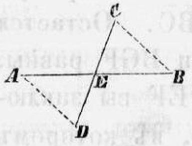
фиг. 52.



§ 35. *Чрезъ точку C провести прямую такъ, чтобы она раздѣлила прямую AB по-поламъ* (фиг. 53).

Соедините точки C и B прямою CB и чрезъ точку A проведите прямую параллельно къ CB. Отъ A до D отложите часть, равную прямой BC, и соедините точки C и D прямою CD; эта прямая раздѣлитъ прямую AB въ точкѣ E на двѣ равныя части AE и BE. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники BCE и ADE равны (§ 26), потому-что BC = AD, уг. CBE = уг. DAE, какъ внутренно-перекрестные, образовавшіеся прямою AB съ параллельными прямыми BC и AD, и уг. BCE = уг. ADE, какъ внутренно-перекрестные, образовавшіеся прямою CD съ параллельными прямыми CB и AD; слѣдовательно въ этихъ равныхъ треугольникахъ соотвѣтствующія стороны BE и AE должны быть равны.

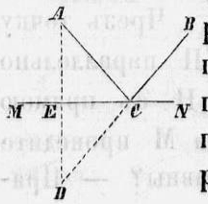
фиг. 53.



§ 36. *Чрезъ точки A и B провести двѣ прямыя такъ, чтобы онѣ, пересѣкаясь на прямой MN, образовали равные углы съ этою прямою* (фиг. 54).

Изъ точки A опустите на прямую MN перпендикуляръ и на его продолженіи отложите часть ED, равную прямой AE. Соедините точки B и D прямою BD и отмѣтьте ея пересѣченіе C съ прямою MN. Наконецъ соедините точки A и C прямою AC. Будутъ-ли углы ACM и BCN равны? — Треугольники CAE и CDE равны

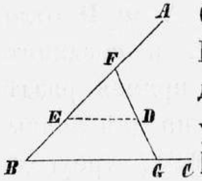
фиг. 54.



(§ 25), потому-что сторона CE общая, AE = DE и прямые углы AEC и DEC равны; слѣдовательно также углы ACE и DCE должны быть равны; но уголъ DCE равенъ также углу BCN, потому-что они противолежащіе. Итакъ вы узнали, что уголъ DCE равенъ углу ACE и въ то-же время онъ равенъ и углу BCN — что возможно только въ такомъ случаѣ, когда углы ACE и BCN равны.

§ 37. *Внутри угла ABC находится точка D, чрезъ которую требуется провести прямую такъ, чтобы она составляла равные углы съ сторонами AB и BC* (фиг. 55).

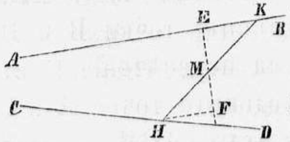
фиг. 55.



Параллельно къ прямой BC проведите чрезъ точку D прямую DE до пересѣченія E съ стороною AB. Отъ E до F отложите часть, равную прямой ED, и чрезъ точки F и D проведите прямую до пересѣченія G съ стороною BC. Остается узнать, будутъ-ли углы BFG и BGF равны. По равенству прямыхъ DE и EF вы заключаете, что треугольникъ DEF равнобедренный, въ которомъ уголъ DFE = углу EDF. Такъ какъ прямыя ED и BC параллельны, то соотвѣтствующіе углы EDF и BGF равны. Вы видите, что уголъ EDF равенъ углу DFE и въ то-же время онъ равенъ углу BGF; слѣдовательно углы DFE (или BFG) и BGF должны быть равны.

§ 38. *Между прямыми AB и CD требуется провести прямую такъ, чтобы она раздѣлилась по-поламъ въ точкѣ M, лежащей между начерченными прямыми* (фиг. 56).

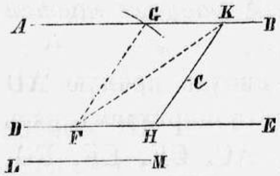
фиг. 56.



Изъ точки M опустите перпендикуляръ ME на прямую AB и на его продолженіи отложите часть MF, равную ME. Чрезъ точку F проведите прямую FH параллельно къ AB до пересѣченія H съ прямою CD, и чрезъ точки H и M проведите прямую HK. Будутъ-ли части HM и MK равны? — Прямыя ME и MF равны, противолежащіе углы EMK, HMF равны и углы (внутренно-перекрестные) MEK и MFH равны, потому-что прямыя EK и HF параллельны; слѣдовательно треугольники EMK и HMF равны (§ 26) и сторона MK равна сторонѣ MH.

§ 39. *Между параллельными AB и DE и чрезъ точку C требуется провести прямую, равную прямой LM* (фиг. 57).

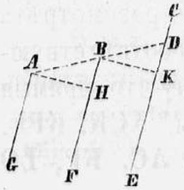
фиг. 57.



Изъ какой-нибудь точки F прямой DE радіусомъ, равнымъ прямой LM, опишите дугу, которая пересѣчетъ прямую AB въ точкѣ G. Соедините точки F и G прямою FG и параллельно къ ней проведите прямую HK чрезъ точку C между параллельными DE и AB. Равняется-ли прямая HK прямой LM? — Проведя прямую FK, вы получите два равные треугольника FGK и FHK (§ 26), въ которыхъ сторона FK общая, внутренно-перекрестные углы GFK и FKH равны, потому-что прямыя FG и HK параллельны, внутренно-перекрестные углы FKG и KFH равны, потому-что прямыя GK и FH параллельны; слѣдовательно стороны FG и HK равны. Такъ какъ прямая FG = прямой LM, то и прямая HK равна LM. Въ тѣхъ-же равныхъ треугольникахъ и стороны GK и FH равны. Откуда вы заключаете, что *параллельныя прямыя FG и HK, находящіяся между параллельными AB и DE, равны*; также равны параллельныя прямыя GK и FH, находящіяся между параллельными FG и HK.

§ 40. *Чрезъ три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой, провести параллельныя, равно-отстоящія между собою* (фиг. 58).

фиг. 58.

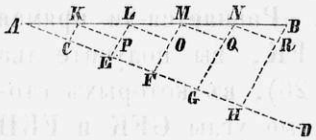


Соедините точки A и B прямою AB и на ея продолженіи отложите часть BD, равную AB. Чрезъ точки C и D проведите прямую CE и параллельно къ ней двѣ прямыя AG и BF чрезъ точки A и B. Чтобы узнать, будетъ-ли разстояніе между прямыми AG и BF равно разстоянію между прямыми BF и CE, опустите перпендикуляръ AH изъ A на BF и перпендикуляръ BK изъ B на CE. Такъ какъ углы AHB и BKC равны и ихъ стороны HB и KD параллельны, то и стороны AH и BK должны быть параллельны. Треугольники AHB и BKD равны (§ 26); въ самомъ дѣлѣ, AB = BD, соотвѣтствующіе углы BAH и DBK равны, потому-что прямыя AH и BK параллельны (§ 17), и соотвѣтствующіе углы ABH и BDK равны, потому-что прямыя BF и CE параллельны; слѣдовательно AH = BK.

§ 41. *Прямую AB раздѣлить на 5 равныхъ частей* (фиг. 59).

Чрезъ точку A проведите какую-нибудь прямую AD и на ней отложите циркулемъ пять равныхъ частей AC, CE, EF, FG, GH. Соедините точки H и B прямою HB и къ ней проведите параллельно прямыя чрезъ точки G, F, E и C до точекъ пересѣченія N, M, L, K съ прямою AB — получите пять равныхъ частей на прямой AB. Понятно, что этимъ-же способомъ можно раздѣлить прямую на сколько угодно равныхъ частей.

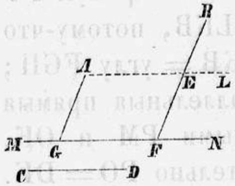
фиг. 59.



Теперь должно удостовѣриться, будутъ-ли части AK, KL, LM и т. д. равны. Для этого проведите прямыя KP, LO, MQ и т. д. параллельно къ AD. Вы уже знаете, что параллельныя прямыя, находящіяся между параллельными, равны (§ 39), т. е. KP = CE, LO = EF, MQ = FG и т. д.; также вамъ извѣстно, что части AC, CE, EF, FG и т. д. равны; слѣдовательно прямыя KP, LO, MQ и т. д., равныя этимъ частямъ, непремѣнно также равны, т. е. AC = KP, KP = LO, LO = MQ, MQ = NR (это пишется вотъ такъ: AC = KP = LO = MQ = NR). Остается вамъ еще разсмотрѣть углы треугольниковъ AKC, KLP, LMO и т. д.; соотвѣтствующіе углы CAK, PKL, OLM и т. д. равны, потому-что прямыя KP, LO, MQ и т. д. параллельны къ AD; углы ACK, KPL, LOM и т. д. равны, потому-что ихъ стороны AC, KP, LO и также стороны CK, PL, OM параллельны (§ 19); слѣдовательно эти треугольники равны (§ 26) и въ нихъ стороны AK, KL, LM, MN, NB равны.

§ 42. *Чрезъ точки A и B провести двѣ параллельныя такъ, чтобы они отрѣзали на прямой MN часть, равную прямой CD* (фиг. 60).

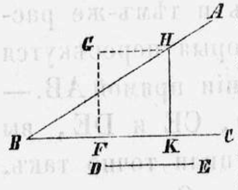
фиг. 60.



Чрезъ точку A проведя прямую AL параллельно къ MN, отложите часть AE, равную CD, и чрезъ B и E проведите прямую BF. Наконецъ чрезъ A проведите AG параллельно къ BF. Требуется узнать, будутъ-ли прямыя GF и CD равны. Такъ какъ прямыя GF и AE параллельны и проведены между параллельными, то они и равны (§ 39); но прямая AE также равна CD, слѣдовательно GF = CD.

§ 43. *Провести перпендикуляръ къ сторонѣ BC угла ABC такъ, чтобы его длина, заключенная между сторонами этого угла, равнялась прямой DE* (фиг. 61).

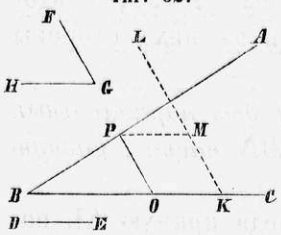
фиг. 61.



Изъ произвольной точки F возставьте перпендикуляръ къ сторонѣ BC и отложите на немъ часть FG, равную прямой DE. Чрезъ точку G проведите прямую GH параллельно къ BC до пересѣченія H съ стороною AB, и наконецъ проведите прямую HK параллельно къ GF до пересѣченія K съ стороною BC. Прямая HK перпендикулярна къ BC, потому-что прямыя HK и FG параллельны, и прямая FG перпендикулярна къ BC (§ 18); прямая HK = DE, потому-что параллельныя прямыя FG и HK, находящіяся между параллельными GH и FK, равны (§ 39), и прямая FG въ тоже время равна DE.

§ 44. *Между сторонами угла ABC требуется провести прямую, равную длинѣ DE, такъ, чтобы эта прямая составила съ стороною BC уголъ, равный углу FGH* (фиг. 62).

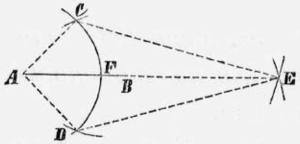
фиг. 62.



При какой-нибудь точкѣ К стороны ВС начертите уголъ BKL, равный углу FGH (§ 24). Отъ К до М отложите часть, равную прямой DE, и чрезъ М проведите прямую МР параллельно къ ВС до пересѣченія Р съ стороною АВ. Наконецъ чрезъ Р проведите прямую РО параллельно къ LK. — Уголъ РОВ = углу LKB, потому-что прямыя РО и LK параллельны, и уголъ LKB = углу FGH; слѣдовательно уголъ РОВ = углу FGH. Параллельныя прямыя РО и МК, находящіяся между параллельными РМ и ОК, равны (§ 39), и прямая МК = DE; слѣдовательно РО = DE.

§ 45. *Опредѣлить точку на продолженіи прямой АВ (безъ помощи линейки).*

фиг. 63.



Изъ точки А (фиг. 63) опишите дугу, которая пересѣчетъ прямую АВ въ точкѣ F. Изъ точки F однимъ и тѣмъ-же раствореніемъ циркуля опишите двѣ дуги, которыя пересѣкутъ большую дугу въ точкахъ С и D. Изъ точекъ С и D однимъ и тѣмъ-же раствореніемъ циркуля опишите двѣ дуги, которыя пересѣкутся въ точкѣ Е; эта точка лежитъ на продолженіи прямой АВ.— Такъ-ли это? — Проведя прямыя АС, AD, СЕ и DE, вы получите уголъ CAD, съ которымъ вы поступили точно такъ, какъ въ (§ 29) поступлено съ угломъ АВС. Откуда вы заключаете, что уголъ CAD раздѣлился линіею АЕ на двѣ равныя части; но эта линія, какъ вамъ уже извѣстно, должна быть прямая; слѣдовательно точка Е лежитъ на продолженіи прямой АВ.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

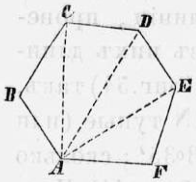
1) Раздѣлить тупой уголъ на двѣ равныя части. — 2) Возможно-ли вѣрно раздѣлить уголъ на двѣ равныя части посредствомъ транспортира? — 3) Какъ раздѣлить прямой уголъ на шесть равныхъ частей? — 4) Сколько прямыхъ можно провести чрезъ точку С (фиг. 43) параллельно къ АВ? — 5) Что значитъ возставить — опустить перпендикуляръ? — 6) Сколько перпендикуляровъ можно опустить изъ точки С на прямую АВ? — 7) Чѣмъ опредѣляется разстояніе точки С до прямой АВ? — 8) Когда приходится возставить перпендикуляръ по способу (фиг. 48)? — 9) Въ (фиг. 48) уголъ $f = 109^{\circ}25'$; сколько градусовъ и минутъ въ углахъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*? — 10) Въ (фиг. 52) прямая CD = 28 саж. 5 фут. и уголъ ECF = 45°; сколько саженъ и футовъ содержитъ прямая EF? — 11) Какъ называются линіи, проведенныя между точками А и D (фиг. 54) — которая изъ нихъ длиннѣйшая?—12) Можно-ли провести прямыя АС и ВС (фиг. 54) такъ, чтобы они при точкѣ С составили съ прямою MN тупые (или прямые) углы? — 13) Въ (фиг. 55) уголъ $ABC = 63^{\circ}35'$; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BFG и въ углѣ BGF? — 14) Проведите двѣ параллельныя АВ и DE (см. фиг. 57), отстоящія одна отъ другой на $1^{3}/_{4}$ дюйма, и между ними отмѣтьте точку С, отстоящую отъ прямой DE на $^{1}/_{2}$ дюйма. Какъ вы проведете чрезъ точку С между этими параллельными прямую, равную $2^{1}/_{4}$ дюйма? — 15) Сколько саженъ и футовъ содержитъ прямая КН (фиг. 57), когда FG = 3 саж. $3^{1}/_{2}$ фут.? — 16) Возможно-ли рѣшить вопросъ (§ 40), когда точки А, В, С лежатъ на одной прямой? — 17) Прямую, длиною въ 1 вершокъ, раздѣлить на 10 равныхъ частей? 18) Проведя прямую MN (фиг. 60), отмѣтьте точку А, отстоящую отъ MN на $1^{1}/_{2}$ дюйма, и точку В, отстоящую отъ MN на $2^{1}/_{2}$ дюйма и отъ точки А на 2 дюйма. Какъ вы отрѣжете параллельными прямыми, проходящими чрезъ точки А и В, на прямой MN часть, равную $^{7}/_{8}$ дюйма. — 19) Начертите уголъ $ABC = 28^{\circ}$ (фиг. 61) и проведите между его сторонами прямую, равную $^{3}/_{8}$ вершка, перпендикулярно къ сторонѣ ВС. — 20) Въ (фиг. 62) уголъ $ABC = 100^{\circ}$, уголъ FGH $= 32^{\circ}$ и прямая DE = $1^{1}/_{2}$ дюймамъ. Съ помощіею этихъ данныхъ рѣшить вопросъ по (§ 44). — 21) Какъ рѣшить вопросъ (§ 43), когда уголъ АВС прямой или тупой? — 22) Какъ рѣшить вопросъ (§ 43), когда точка G перпендикуляра FG приходится внутри угла АВС?

ОТДѢЛЪ III.

Многоугольники.

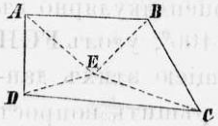
§ 46. Многоугольники. Многоугольникъ есть фигура, ограниченная со всѣхъ сторонъ болѣе, нежели тремя прямыми линіями (фиг. 64). Прямыя AB, BC, CD и т. д., которыми ограниченъ многоугольникъ, называются его *сторонами*, а точки пересѣченія A, B, C и т. д. сторонъ — его *вершинами*. Сумма сторонъ многоугольника составляетъ его *периметръ*. Прямая, соединяющая двѣ вершины многоугольника, называется его *діагональю;* въ многоугольникѣ ABCDEF проведены діагонали AC, AD, AE. Во всякомъ многоугольникѣ находится столько угловъ, сколько въ немъ сторонъ; такъ, напримѣръ, многоугольникъ ABCDEF, въ которомъ шесть сторонъ, содержитъ шесть угловъ ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, BAF. Многоугольники, по числу сторонъ, называются *четыреугольниками*, *пятиугольниками*, *шестиугольниками* и т. д. *Правильнымъ многоугольникомъ* называется такая фигура, въ которой всѣ стороны равны и также всѣ углы равны.

фиг. 64.



§ 47. Четыреугольники. Внутри четыреугольника ABCD (фиг. 65) отмѣтьте какую-нибудь точку E и соедините ее съ вершинами A, B, C, D прямыми EA, EB, EC, ED — получите четыре треугольника AEB, BEC, CED, AED. Извѣстно (§ 22), что въ треугольникѣ сумма угловъ равна 180°; слѣдовательно въ треугольникахъ AEB, BEC, CED, AED сумма угловъ составляетъ 4 раза 180°, или 720°. Вы знаете (§ 14), что сумма угловъ, лежащихъ около точки E, равна 360°. Отъ суммы

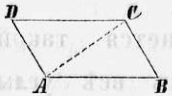
фиг. 13.



всѣхъ угловъ, образовавшихся внутри четыреугольника, т. е. отъ 720°, отнимите сумму угловъ, лежащихъ около точки E, т. е. 360° — вы узнаете, что углы ABC, BCD, CDA, DAB составляютъ 360°.

§ 48. Четыреугольникъ ABCD (фиг. 66), въ которомъ противолежащія стороны AB и DC, AD и BC параллельны, называется *параллелограмомъ.* Параллельныя прямыя AD и BC проведены между параллельными AB и DC; слѣдовательно (§ 39) AD = BC и AB = DC; т. е. *въ параллелограмѣ противолежащія стороны равны.*

фиг. 66.



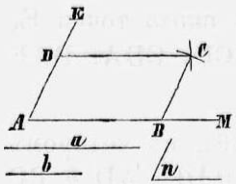
Такъ какъ прямыя AB и DC, пересѣченныя прямою AD, параллельны, то (§ 17) сумма внутреннихъ угловъ BAD и ADC равна 180°. Параллельныя прямыя AD и BC, пересѣченныя прямою AB, образуютъ внутренніе углы BAD и ABC, коихъ сумма равна 180°. Прибавивъ уголъ ADC къ углу BAD, вы получите 180°, и прибавивъ уголъ ABC къ тому-же самому углу BAD, вы получите опять 180°; слѣдовательно углы ADC и ABC должны быть равны, т. е. *въ параллелограмѣ противоположные углы равны.*

Проведя діагональ AC, вы раздѣлите параллелограмъ на два равные треугольника ABC и ADC. Почему эти треугольники равны? Потому-что стороны AB и DC равны (противолежащія стороны параллелограма), AD = BC (противолежащія стороны параллелограма), и углы ADC и ABC равны (противоположные углы параллелограма); вслѣдствіе (§ 25) эти треугольники равны; слѣдовательно *діагональю раздѣляется параллелограмъ на два равные треугольника.*

§ 49. *Начертить параллелограмъ, коего стороны должны равняться прямымъ a и b, такъ, чтобы уголъ между этими сторонами равнялся углу n* (фиг. 67).

На какой-нибудь прямой AM отложите часть AB, равную прямой *a* и при точкѣ A начертите уголъ EAB, равный углу *n*; на прямой AE отложите часть AD, равную прямой

фиг. 67.

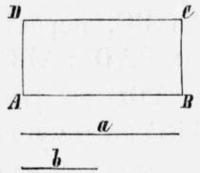


b. Изъ точки D радіусомъ, равнымъ прямой *a*, опишите дугу, и изъ точки B радіусомъ, равнымъ прямой *b*, еще дугу; эти дуги пересѣкутся въ точкѣ C. Наконецъ соедините точки B и C прямою BC, и точки D и C прямою DC.

§ 50. Прямоугольникомъ называется такой параллелограмъ ABCD (фиг. 68), въ которомъ всѣ углы прямые.

Начертить прямоугольникъ, коего стороны равнялись бы прямымъ a и b (фиг. 68).

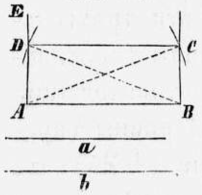
фиг. 68.



Проведя прямую, отложите на ней часть AB, равную прямой *a*, и изъ точекъ A и B возставьте къ AB перпендикуляры; на нихъ отложите части AD и BC, равныя прямой *b*, и соедините точки D и C прямою DC.

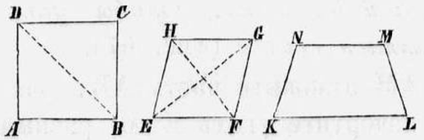
Начертить прямоугольникъ такъ, чтобы его сторона равнялась прямой a, а діагональ — прямой b (фиг. 69).

фиг. 69.



Проведите какую-нибудь прямую и отложите на ней часть AB, равную прямой *a*. Изъ точекъ A и B возставьте перпендикуляры и изъ тѣхъ-же точекъ радіусами, равными прямой *b*, опишите двѣ дуги такъ, чтобы они пересѣклись съ перпендикулярами въ точкахъ D и C. Наконецъ соедините точки D и C прямою DC.

фиг. 70.



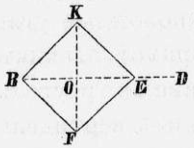
§ 51. Параллелограмъ, у котораго стороны равны и всѣ углы прямые, называется *квадратомъ*. Ромбъ есть такой параллелограмъ, въ которомъ стороны равны. Который изъ начерченныхъ четыреугольниковъ (фиг. 70) квадратъ — который называется ромбомъ? Четыреугольникъ KLMN, у котораго только двѣ противоположныя стороны параллельны, называется *трапеціею*.

Въ квадратѣ проведя діагональ BD, вы получите два равнобедренные прямоугольные треугольника ABD и CBD, въ которыхъ каждый изъ угловъ ABD, ADB, CBD и CDB равенъ 45^0 (§ 27).

Чтобы начертить квадратъ, сторона *a* котораго извѣстна, вы должны изъ концевъ A и B прямой AB, которая равна сторонѣ *a*, возставить перпендикуляры и на нихъ отложить части AD и BC, равныя прямой *a*. Наконецъ соедините точки D и C прямою DC.

Начертить квадратъ, коего діагональ равнялась бы прямой m (фиг. 71).

фиг. 74.



На какой-нибудь прямой BD отложите часть BE, равную прямой *m*. Чрезъ средину O прямой BE проведите прямую перпендикулярно къ BE и на этомъ перпендикулярѣ отложите части OK и OF, равныя прямой OB. Наконецъ проведите прямыя BK, KE, EF и BF. Будетъ-ли четыреугольникъ BFEK квадратъ? — Образовавшіеся треугольники BOF, EOF, EOK, BOK прямоугольные (почему?); кромѣ того они равнобедренные (почему?) и равны между собою (почему?); слѣдовательно стороны BF, EF, EK и BK равны. Извѣстно (§ 27), что въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ острые углы содержатъ по 45^0; слѣдовательно уголъ $KBF = 90^0$, уголъ $BKE = 90^0$, уголъ $KEF = 90^0$ и уголъ $BFE = 90^0$. Четыреугольникъ BFEK есть квадратъ, потому-что его стороны равны и углы прямые.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Сколько аршинъ плинтуса[1] потребно для комнаты (см. фиг. 68), длина которой 25, а ширина 17 футъ? — 2) Сколько

---

[1] *Плинтусъ* — деревянная дощечка, прикрѣпляемая къ стѣнамъ у ихъ пересѣченія съ полами.

аршинъ лентъ потребно для обшивки ковра (см. фиг. 68), длина котораго $7^1/_2$ футъ, а ширина $5^1/_2$ футъ? — *(12 аршинъ)*. — 3) Въ четыреугольникѣ ABCD (фиг. 65) уголъ $ABC = 106^\circ35'$, уголъ $BCD = 53^\circ46'$ и уголъ $ADC = 87^\circ52'$; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BAD? — 4) Какіе углы въ параллелограмѣ равны? — Сколько въ параллелограмѣ тупыхъ — сколько острыхъ угловъ? — 5) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC (фиг. 66), когда уголъ $BCD = 69^\circ43'$? — 6) Что дѣлаетъ діагональ (фиг. 66) съ углами BCD и BAD? — 7) Начертить параллелограмъ такимъ образомъ, чтобы его сторона a (фиг. 67) равнялась 2 дюйм., сторона $b = 1^1/_4$ дюйма и уголъ n равнялся 125°. — 8) Начертить прямоугольникъ, въ которомъ сторона $a = {}^5/_8$ дюйма и діагональ $b = 1^1/_2$ дюйма. — 9) Чѣмъ отличается квадратъ отъ ромба и ромбъ отъ параллелограма? — 10) Чѣмъ отличается трапеція отъ параллелограма? — 11) Какую часть параллелограма ABCD (фиг. 66) составляетъ треугольника ABC? — 12) По чему въ трапеціи противоположные углы не могутъ равны? — 13) Раздѣлются-ли: прямоугольникъ, квадратъ, ромбъ, трапеція діагоналями на два равные треугольника? — 14) Для сада должно построить заборъ изъ вертикально-поставленныхъ досокъ, ширина которыхъ ${}^3/_4$ фута; сколько потребно этакихъ досокъ, когда садъ имѣетъ видъ прямоугольника, длина котораго 120, а ширина 66 сажень? — *(3472 доски)*. — 14) Квадратный дворъ, длиною въ 24 сажени, требуется обвести тротуаромъ изъ квадратныхъ плитъ, длиною въ $1^1/_2$ фута каждая плита; сколько потребно такихъ плитъ? — *(444 плиты)*. — 15) Сколько пудовъ алебастру[1]) потребно на карнизъ[2]) комнаты, длина которой $9^1/_2$ аршинъ и ширина $6^3/_4$ аршина, когда извѣстно, что на 10 сажень длины карниза полагается $3^1/_2$ пуда алебастру? — *(Почти $3^3/_4$ пуда)*. — 16) Для кладки цоколя[3]) потребно 7 каменьщиковъ на 9 сажень каждаго ряда плитъ; сколько каменьщиковъ должно нанять для кладки цоколя, состоящаго изъ

---

1) *Алебастръ* — камень известковой породы.

2) *Карнизъ* — стѣнное украшеніе подъ крышею дома или подъ потолкомъ комнаты.

3) *Цоколь* — нижняя часть стѣны.

4 рядовъ плитъ, когда длина зданія 20 саж. 2 ар. и ширина 15 саж. $1^1/_2$ ар.? — *(112 каменьщиковъ)*. — 17) Начертить трапецію, параллельныя стороны которой равны: первая $1^1/_2$ вершк. и вторая ${}^3/_4$ вершка, а непараллельныя стороны равны $1^1/_8$ вершк. каждая. — (Отложите $1^1/_2$ вер. отъ A до B и опишите дугу изъ A радіусомъ, равнымъ $1^1/_8$ вер. и тѣмъ-же самымъ раствореніемъ циркуля еще дугу изъ B. Раздѣлите прямую AB въ точкѣ C по-поламъ и на прямой AB отложите ${}^3/_8$ вер. (половину второй параллельной стороны) отъ C до D и столько-же отъ C до E. Потомъ возставьте къ прямой AB изъ точекъ E и D перпендикуляры до пересѣченія F и G съ дугами и соедините точки F и G, точки A и F, точки B и G прямыми FG, AF, BG). — 18) Прямоугольный лугъ, длиною въ 160 и шириною въ 120 сажень, должно огородить деревьями, отстоящими одно отъ другаго на 10 футъ; сколько потребно деревьевъ? — *(392 дерева)*. — 19) Строеніе, длиною въ 14 саж. 2 ар. и шириною въ 10 саж., требуется обвести заборомъ, отстоящимъ отъ длиннаго фаса[1]) строенія на $2^1/_2$ ар., а отъ короткаго на $3^1/_2$ ар.; какой длины долженъ быть заборъ? — *(Въ 172 ар.)*. — 20) Къ краю прямоугольной доски стола должно прибить клеенку гвоздиками; сколько потребно гвоздиковъ, когда длина доски стола 2 ар. 4 вер., ширина 1 ар. 6 вер. и разстояніе между гвоздиками 2 вершка? — *(58 гвоздиковъ)*. — 21) Прямоугольное поле, коего длина 1000 футъ и ширина 800 футъ, требуется обратить въ ботаническій садъ, въ которомъ растенія должно расположить на прямыхъ параллельныхъ къ сторонамъ прямоугольника въ разстояніи 2 футъ одно отъ другаго; сколько помѣстится растеній въ этомъ саду? — *(200901 растеніе)*.

§ 52. Діагонали многоугольника. **Отъ одной вершины, напримѣръ A (фиг. 64), до прочихъ вершинъ многоугольника вы можете провести столько прямыхъ AB, AC, AD, AE, AF, сколько сторонъ въ многоугольникѣ безъ одной стороны; такъ, напримѣръ, въ четыреугольникѣ вы можете провести такихъ линій 4 безъ 1, въ шестиугольникѣ**

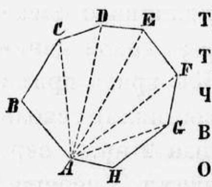
---

1) *Фасъ* — лицевая часть зданія.

— 6 безъ 1, въ восьмиугольникѣ — 7 линій. Двѣ крайнія изъ этихъ линій, напримѣръ AB и AF, суть стороны многоугольника, а прочія проведенныя прямыя суть діагонали; слѣдовательно *изъ вершины A проведено столько діагоналей, сколько сторонъ въ многоугольникѣ безъ трехъ сторонъ;* такъ, напримѣръ, въ четыреугольникѣ вы можете провести отъ одной вершины до прочихъ вершинъ три прямыя, изъ которыхъ двѣ суть стороны четыреугольника; слѣдовательно въ четыреугольникѣ изъ одной вершины можно провести одну діагональ (4 безъ 3); въ пятиугольникѣ можно провести 2 діагонали (5 безъ 3), въ семиугольникѣ — 4 діагонали (7 безъ 3) и т. д.

§ 53. Діагональю AC (фиг. 72) отдѣляется треугольникъ ABC отъ многоугольника ABCDEFGH, двумя діагоналями AC и AD отдѣляются два треугольника ABC и ACD, тремя діагоналями AC, AD, AE отдѣляются три треугольника, четырьмя діагоналями — четыре треугольника и т. д.; наконецъ проведя послѣднюю діагональ AG, вы раздѣлите оставшійся четыреугольникъ AFGH на два треугольника AFG и AGH. Откуда вы заключаете, что многоугольникъ раздѣляется на столько треугольниковъ, сколько въ немъ проведено діагоналей, и еще однимъ треугольникомъ больше; но діагоналей можно провести столько, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ трехъ сторонъ; слѣдовательно *треугольниковъ получается въ многоугольникѣ столько, сколько въ немъ сторонъ безъ двухъ сторонъ;* такъ напримѣръ десятиугольникъ раздѣляется діагоналями на 8 треугольниковъ; въ самомъ дѣлѣ, въ немъ можно провести 10 безъ 3, или 7 діагоналей; шестью діагоналями AC, AD, AE и т. д. вы отдѣляете 6 треугольниковъ, и, проведя седьмую діагональ, вы получаете еще два треугольника.

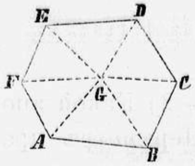
фиг. 72.



§ 54. Сумма угловъ въ многоугольникѣ.

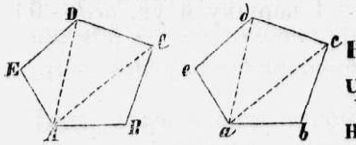
Начертите какой-нибудь многоугольникъ (фиг. 73) и соедините прямыми GA, GB, GC и т. д. точку G, взятую внутри его, съ вершинами A, B, C и т. д. — получите столько треугольниковъ AGB, BGC, CGD и т. д., сколько сторонъ въ многоугольникѣ. Въ каждомъ изъ этихъ треугольниковъ сумма угловъ равна 180°, слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ образовавшихся внутри многоугольника, содержитъ столько разъ 180°, сколько въ многоугольникѣ заключается треугольниковъ AGB, BGC, CGD и т. д., или сколько въ немъ сторонъ; такъ, напримѣръ, сумма всѣхъ угловъ семиугольника равна 7 × 180°, или 1260°. Чтобы узнать, сколько градусовъ содержитъ сумма угловъ ABC, BCD, CDE и т. д., вы должны отнять сумму угловъ, расположенныхъ около точки G, отъ суммы всѣхъ угловъ, образовавшихся внутри многоугольника. Извѣстно что углы, лежащіе около точки G, составляютъ 360°; слѣдовательно *сумма угловъ ABC, BCD, CDE и т. д. содержитъ столько разъ 180 градусовъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ, безъ 360 градусовъ;* такъ, напримѣръ, для пятиугольника вы должны взять 5 разъ 180° — получите 900°; потомъ вы должны отнять 360° отъ 900° — узнаете, что въ пятиугольникѣ сумма угловъ равна 540°.

фиг. 73.



Въ правильныхъ многоугольникахъ углы ABC, BCD, CDE и т. д. равны, а потому легко узнать, сколько градусовъ содержитъ каждый изъ этихъ угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ правильномъ шестиугольникѣ сумма его угловъ равна 6 разъ 180° безъ 360°, или равна 720°; откуда уголъ ABC долженъ равняться шестой долѣ 720°, или уголъ ABC = 120°.

фиг. 74.



§ 53. Начертаніе равныхъ многоугольниковъ.

Чтобы начертить многоугольникъ, равный многоугольнику ABCDE (фиг. 74), проведите въ немъ діагонали AC и AD и потомъ начертите треугольникъ *abc*, равный треугольнику ABC (§ 23), треугольникъ *acd*, равный треугольнику ACD, и треугольникъ *ade*, равный треугольнику ADE.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Сколько сторонъ въ девятиугольникѣ? — 2) Какой многоугольникъ называется правильнымъ? — 3) Периметръ правильнаго семиугольника равенъ 17 саженямъ; сколько сажень и футовъ содержитъ одна изъ сторонъ? — 4) Сколько прямыхъ можно провести отъ одной вершины до прочихъ вершинъ семиугольника — девятиугольника — многоугольника съ 16 сторонами? — 5) Сколько діагоналей можно провести изъ одной вершины въ девятиугольникѣ — въ двѣнадцатиугольникѣ — въ многоугольникѣ съ 15 сторонами? — 6) На сколько треугольниковъ раздѣляются діагоналями многоугольники: съ 8-ю, 12-ю, 20-ю и 32-мя сторонами? — 7) Почему въ треугольникѣ нельзя провести ни одной діагонали? — 8) Сколько градусовъ содержитъ сумма угловъ четыреугольника, шестиугольника, семиугольника, восьмиугольника, десятиугольника? — 9) Сколько градусовъ содержитъ сумма угловъ, лежащихъ около точки G (фиг. 73) въ двѣнадцатиугольникѣ? — 10) Сколько угловъ составится діагоналями при вершинѣ A (фиг. 72) пятнадцатиугольника? — 11) Сколько градусовъ содержитъ сумма всѣхъ угловъ треугольниковъ AGB, BGC, CGD и т. д. (фиг. 72) въ восьмиугольникѣ? — 12) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC (фиг. 73) правильныхъ многоугольниковъ: съ 5-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю, 10-ю, 15-ю сторонами? — 13) Начертить многоугольникъ ABCDE (фиг. 74), у котораго сторона AB = $1^1/_2$ дюйм., уг. ABC = 108°, уг. BAE = 112°, AE = $^7/_8$ дюйм., BC = $^5/_8$ дюйм., уг. AED = 89° и ED = $^3/_4$ дюйма. — 14) Начертить многоугольникъ (фиг. 74), у котораго cd = $^3/_4$ вершка, уг. cde = 124°, уг. bcd = 105°, pe = $^5/_8$ вершка, cb = $^3/_8$ вершка, ac = 1 вершку и уг. aed = 91°.

ОТДѢЛЪ IV.

Пропорціональность линій и подобіе фигуръ.

§ 54. Пропорціональность чиселъ и линій.

Возьмите такія четыре числа 42, 28, 6 и 4, чтобы 28 было во столько разъ болѣе 4, во сколько разъ 42 болѣе 6, или чтобы 4 составило такую часть числа 28, какую составляетъ 6 числа 42. Въ такомъ случаѣ четыре числа *пропорціональны* или составляютъ *пропорцію* $28 : 4 = 42 : 6$, которая выговаривается: 28 относится къ 4 точно такъ, какъ 42 относится къ 6. Числа 28, 4, 42, 6 называются *членами* пропорціи; числа 28 и 6 суть *крайніе* члены, а числа 4 и 42 — *средніе*.

Если какая-нибудь прямая AB = 6 саж. и CD = 4 саж., т. е. прямая AB содержитъ 6 равныхъ частей и CD четыре такія-же части, то понятно, что $AB : CD = 6 : 4$. Представьте себѣ еще двѣ прямыя EF = 6 вершк. и GH = 4 вершк.; тогда прямая EF во столько разъ болѣе CD, во сколько разъ 6 болѣе 4, т. е. $EF : GH = 6 : 4$. Откуда вы заключаете, что прямая AB во столько-же разъ болѣе CD, во сколько разъ EF болѣе GH, или $AB : CD = EF : GH$; слѣдовательно изъ двухъ пропорцій $AB : CD = 6 : 4$ и $EF : GH = 6 : 4$, въ которыхъ числа, стоящія по одну сторону знака (=), равны, составилась пропорція $AB : CD = EF : GH$.

§ 55. Предположите, что какая-нибудь прямая $m = 15$ саж., $n = 4$ саж. и $p = 10$ саж., и что прямая x, длина которой вамъ неизвѣстна, должна быть во столько разъ менѣе прямой p, во сколько разъ прямая n менѣе прямой m. Вслѣдствіе этихъ предположеній составится пропорція $m : n = p : x$. Такъ какъ членъ 4 составляетъ $\frac{4}{15}$ члена 15, то и неизвѣстное число x должно составить $^4/_{15}$ члена 10. Чтобы найти $^4/_{15}$ числа 10, вы должны умножить 4 на 10 (получите 40) и потомъ раздѣлить 40 на 15 — получите $\frac{40}{15}$ или $2^{2}/_{3}$. Какимъ образомъ получилось число $2^{2}/_{3}$ изъ пропорціи $15:4 = 10:x$? — *Вы умножили среднiй членъ 4 на среднiй членъ 10 и раздѣлили полученное число 40 на извѣстный крайнiй членъ 15.*

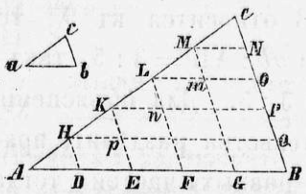
Предположите, что какая-нибудь прямая $a = 5$ саж., $b = 12$ саж., $c = 18$ саж., и что прямая a должна быть во столько разъ менѣе b, во сколько разъ прямая x, длина которой неизвѣстна, менѣе прямой c. Основываясь на этихъ предположенiяхъ, вы составите пропорцiю $a:b = x:c$. Такъ какъ членъ x долженъ быть во столько разъ менѣе 18, во сколько разъ 5 менѣе 12, то раздѣленiемъ 12 на 5 вы узнаете, во сколько разъ членъ x менѣе 18. Чтобы найти величину x вы раздѣлите 18 на $\frac{12}{5}$, т. е. помножите 18 на 5 (получите 90) и раздѣлите 90 на 12 (получите $7^{6}/_{12}$ или $7^{1}/_{2}$). Откуда вы заключаете, что *для полученiя числа $7^{1}/_{2}$ должно умножить крайнiй членъ 18 на крайнiй членъ 5 и потомъ раздѣлить полученное число 90 на среднiй членъ 12.*

§ 56. Подобiе треугольниковъ. Изъ предъидущаго вамъ извѣстно (§§ 23, 25, 26), что для опредѣленiя треугольника, кромѣ угловъ, должна быть извѣстна, по крайней мѣрѣ, одна изъ сторонъ; одними углами треугольникъ еще не опредѣленъ, т. е. возможно начертить безчисленное множество неравныхъ треугольниковъ, въ которыхъ однако углы по-парно будутъ равны. Такiе треугольники, въ которыхъ углы по-парно равны, но стороны неравны, называются *подобными.*

Предположите, что въ треугольникахъ ABC и abc (фиг. 75) уголъ BAC = углу bac и уголъ ABC = углу abc. Чтобы узнать, сколько градусовъ въ углѣ ACB, вы должны отъ 180° отнять углы BAC и ABC. Отнявъ отъ 180° столько-же градусовъ, т. е. углы bac и abc, вы узнаете, сколько градусовъ въ углѣ acb. Отъ 180° вы отняли по-ровну, стало быть остатки должны быть равны, т. е. уголъ ACB = углу acb. Откуда вы заключаете: *если въ двухъ треугольникахъ два угла равны, то и третьи углы должны быть равны и треугольники подобны.*

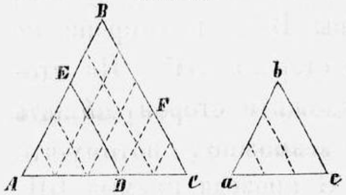
§ 57. Начерчены два подобные треугольника ABC и abc (фиг. 75) такимъ образомъ, что сторона ab составляетъ пятую часть стороны AB. Спрашивается, будетъ-ли сторона bc пятая часть стороны BC, и сторона ac пятая часть стороны AC. На сторонѣ AB отложите сторону ab пять разъ — что возможно, потому-что $ab = {}^{1}/_{5}$ AB. Чрезъ точки D, E, F, G проведя прямыя DH, EK, FL, GM параллельно къ сторонѣ BC, вы раздѣлите сторону AC на пять равныхъ частей (§ 41); слѣдовательно AH $= {}^{1}/_{5}$ AC. Чтобы узнать, будетъ-ли сторона $ac = {}^{1}/_{5}$ AC, разсмотрите треугольники ADH и abc; въ нихъ стороны AD и ab равны, потому-что AD $= {}^{1}/_{5}$ AB и $ab = {}^{1}/_{5}$ AB, углы DAH и bac равны, потому-что треугольники ABC и abc подобны, углы ADH и abc равны, потому-что уголъ ADH = уг. ABC (соотвѣтствующiе углы, образуемые прямою AB съ параллельными DH и BC) и уголъ abc = уг. ABC (въ подобныхъ треугольникахъ); слѣдовательно треугольники ADH и abc равны (§ 26) и сторона AH $= ac$, откуда $ac = {}^{1}/_{5}$ AC (потому-что AH $= {}^{1}/_{5}$ AC). Чрезъ точки H, K, L, M проведя прямыя HQ, KP, LO, MN параллельно къ сторонѣ AB, вы раздѣлите прямую BC на 5 равныхъ частей (§ 41); слѣдовательно BQ $= {}^{1}/_{5}$ BC. Вы уже знаете, что треугольники ADH и abc равны, а потому прямыя DH и bc также равны; прямая DH также равна BQ, потому-что параллельныя DH и BQ проведены между параллельными AB и HQ (§ 39). Такъ какъ прямая DH въ одно и то-же время равна прямой BQ и прямой bc, то BQ $= bc$ и слѣдовательно $bc =$

фиг. 75.



$^1/_5$ BC. Эти разсужденія приводятъ къ слѣдующему заключенію: если сторона меньшаго изъ двухъ подобныхъ треугольниковъ составляетъ какую-нибудь часть соотвѣтствующей[1] стороны большаго треугольника, то и двѣ остальныя стороны меньшаго треугольника составляютъ такую-же часть соотвѣтствующихъ сторонъ большаго треугольника.

фиг. 76.



§ 58. Если въ двухъ подобныхъ треугольникахъ abc и ABC (фиг. 76) сторона ac относится къ сторонѣ AC точно такъ, какъ 3 относится къ 5, то непремѣнно и $ab : AB = 3 : 5$, также $bc : BC = 3 : 5$. Для объясненія этого обстоятельства раздѣлите прямую AC на 5 равныхъ частей; тогда $AD = {}^3/_5\,AC$ и слѣдовательно $AD = ac$. Чрезъ точки стороны AC проведя прямыя параллельно къ сторонѣ BC, вы раздѣлите сторону AB на 5 равныхъ частей; вслѣдствіе чего вы получите $AE : AB = 3 : 5$. Чрезъ тѣ-же точки прямой AC проведите прямыя параллельно къ сторонѣ AB; тогда прямая BC раздѣлится на 5 равныхъ частей, и каждая изъ прямыхъ DE и BF на три такія-же части; слѣдовательно $BF : BC = 3 : 5$ или $DE : BC = 3 : 5$. Разсмотрите теперь треугольники abc и ADE; въ нихъ $ac = AD$, потому-что ac содержитъ столько частей, сколько содержится такихъ-же частей въ AD; по той-же причинѣ $ab = AE$; наконецъ уголъ bac = углу DAE, потому-что треугольники abc и ABC подобны; откуда слѣдуетъ (§ 25), что треугольники abc и ADE равны и $bc = DE$. Такъ какъ $AD = ac$, $AE = ab$ и $DE = bc$, то пропорціи

$$AD : AC = 3 : 5,$$
$$AE : AB = 3 : 5 \text{ и}$$
$$DE : BC = 3 : 5$$

можно написать вотъ такъ:

$$ac : AC = 3 : 5,$$
$$ab : AB = 3 : 5 \text{ и}$$
$$bc : BC = 3 : 5.$$

Въ (§ 54) познакомившись съ пропорціями, вы узнали, что изъ двухъ пропорцій, въ которыхъ числа, стоящія по одну сторону знака (=), равны, можно составить одну пропорцію. На этомъ основаніи изъ послѣднихъ пропорцій вы получите

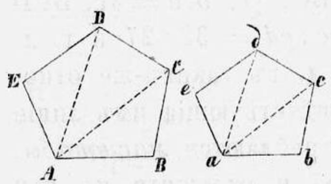
$$ac : AC = ab : AB,$$
$$ac : AC = bc : BC \text{ и}$$
$$ab : AB = bc : BC.$$

Отсюда вы заключаете, что въ подобныхъ треугольникахъ соотвѣтствующія стороны пропорціональны.

§ 59. Подобіе многоугольниковъ.

Два многоугольника $abcde$ и $ABCDE$ (фиг. 77) подобны, когда они діагоналями, проведенными чрезъ соотвѣтствуяющія вершины, раздѣляются на подобные треугольники. Въ подобныхъ треугольникахъ ACB и acb уг. ABC = уг. abc, уг. CAB = уг. cab, уг. ACB = уг. acb и $AB : ab = BC : bc$, $BC : bc = AC : ac$. Потомъ изъ подобныхъ треугольниковъ ACD и acd вы получите уг. ACD = уг. acd, уг. CAD = уг. cad, уг. ADC = уг. adc и $CD : cd = AC : ac$, $CD : cd = AD : ad$. Наконецъ въ подобныхъ треугольникахъ ADE и ade уг. ADE = уг. ade, уг. AED = уг. aed, уг. DAE = уг. dae и $DE : de = AD : ad$, $DE : de = AE : ae$.

фиг. 77.



Сумма угловъ ACB и ACD равна суммѣ угловъ acb и acd, потому-что $ACB = acb$, $ACD = acd$, но $ACB + ACD$ = уг. BCD и $acb + acd$ = уг. bcd, слѣдовательно уг. BCD = уг. bcd. Далѣе уг. $CDE = ADC + ADE$ и уг. $cde = adc + ade$, гдѣ уг. $ADC = adc$ и уг. $ADE = ade$, слѣдовательно уг. CDE = уг. cde. Наконецъ сумма угловъ BAC,

---

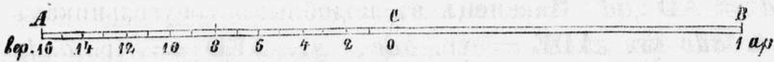
[1] Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ тѣ стороны AB и ab называются соотвѣтствующими, которыя находятся противъ равныхъ угловъ ACB и acb.

CAD, DAE равна суммѣ угловъ *bac*, *cad*, *dae*, или уг. BAE = уг. *bae*. Итакъ вы узнали, что уг. ABC = уг. *abc*, уг. BCD = уг. *bcd*, уг. CDE = уг. *cde*, уг. AED = уг. *aed*, уг. BAE = уг. *bae*, т. е. *въ подобныхъ многоугольникахъ соотвѣтствующіе углы равны.*

Пропорціи $BC : bc = AC : ac$ и $CD : cd = AC : ac$, въ которыхъ члены, стоящіе по правую сторону знака (=), равны, даютъ пропорцію $BC : bc = CD : cd$. Точно такъ-же изъ пропорцій $CD : cd = AD : ad$ и $DE : de = AD : ad$ вы получите $CD : cd = DE : de$. Итакъ у васъ теперь слѣдующія пропорціи $AB : ab = BC : bc$, $BC : bc = CD : cd$, $CD : cd = DE : de$, $DE : de = AE : ae$, которыя показываютъ, что *въ подобныхъ многоугольникахъ стороны пропорціональны.*

§ 60. Масштабы. Какимъ образомъ составить на бумагѣ изображеніе многоугольника ABCDE (фиг. 77), въ которомъ AB = 25 саж., BC = 32 саж., CD=27 саж. и т. д.? Начертите многоугольникъ *abcde*, подобный многоугольнику ABCDE, т. е. чтобы уг. *abc* = уг. ABC, уг. *bcd* = уг. BCD и т. д. и чтобы $ab : bc = 25 : 32$, $bc : cd = 32 : 27$ и т. д. Для начертанія линій *ab*, *bc*, *cd* и т. д. въ такихъ-же отношеніяхъ, въ какихъ находятся соотвѣтствующія имъ линіи AB, BC, CD и т. д. въ натурѣ, употребляются *масштабы*.

фиг. 78.



Проведите прямую AB (фиг. 78) и отложите на ней по вершку отъ A до C, отъ C до B и т. д.. Предположите, что вершокъ долженъ представить на бумагѣ одинъ аршинъ. Такъ какъ аршинъ въ 16 разъ больше вершка, то по этому масштабу прямая *mn* на бумагѣ должна быть въ 16 разъ меньше соотвѣтствующей прямой MN въ натурѣ, или $mn = {}^{1}/_{16} MN$. Раздѣлите вершокъ AC на 16 равныхъ частицъ и подпишите цифры, какъ показано въ фиг. 78. Цифры, поставленныя вправо отъ нуля (точки C), соотвѣтствуютъ аршинамъ, а цифры, стоящія влѣво отъ нуля, принадлежатъ вершкамъ; стало быть разстояніе отъ нуля до B представляетъ 1 аршинъ, разстояніе отъ нуля влѣво до цифры 6 представляетъ 6 вершковъ.

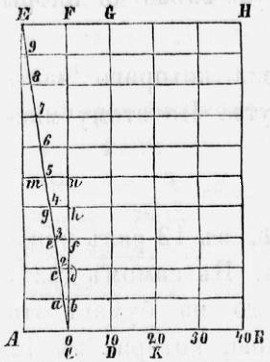
фиг. 79.

Въ фиг. 79 начерченъ масштабъ, для котораго часть AC, равная 1 дюйму, представляетъ 1 футъ. По этому масштабу прямая *mn*, начерченная на бумагѣ, въ 12 разъ меньше соотвѣтствующей прямой MN въ натурѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если истинная длина MN равна 1 футу, то на бумагѣ эта длина изобразится 1 дюймомъ, т. е. прямою, которая въ 12 разъ меньше прямой MN. Раздѣлите дюймъ AC на 12 равныхъ частицъ и подпишите цифры въ такомъ порядкѣ, какъ показано въ фиг. 79. Такъ какъ прямая AC представляетъ футъ, то каждая изъ частицъ этой прямой представляетъ дюймъ. Какъ вы отложите по этому масштабу 2 фута 7 дюймовъ?— Поставьте одну ножку циркуля въ точкѣ B, подъ которою написана цифра 2, вправо отъ нуля, а другую ножку въ точкѣ 7, находящейся влѣво отъ нуля; раствореніе циркуля представитъ вамъ длину въ 2 фута 7 дюймовъ *по масштабу одного фута въ дюймъ.*

Предположите, что прямая AC (дюймъ) представляетъ 12 футовъ; тогда прямая MN, коей длина равна 12 футамъ или 12 разъ 12 дюймамъ (144 дюйм., потому-что въ футѣ 12 дюйм.), должна быть въ 144 раза больше своего изображенія *mn* на бумагѣ, или $mn = {}^{1}/_{144} MN$.

§ 61. Масштабы, съ которыми вы познакомились въ предъидущемъ §, называются *линейными*. Теперь придется вамъ имѣть дѣло съ *поперечными* масштабами. Предположите, что часть AC, равная полудюйму, должна представлять длину въ 10 сажень, и что требуется изобразить на бумагѣ всѣ линіи, которыя не меньше одной сажени. Проведите прямую AB (фиг. 80) и отложите на ней части AC, CD, DK, равныя полудюйму. Изъ точекъ A, C,

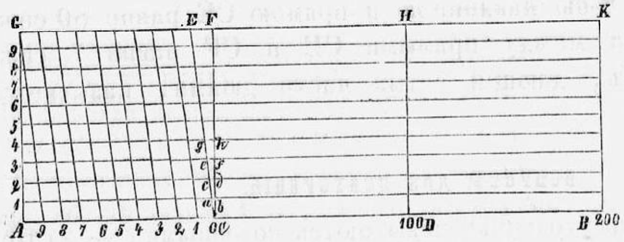
фиг. 80.



D, K возставьте перпендикуляры къ прямой AB и на крайнемъ перпендикулярѣ отложите 10 произвольныхъ, но равныхъ частей. Чрезъ точки этого перпендикуляра проведите прямыя параллельно къ прямой AB и точки E и C соедините прямою EC. Этими линіями образуются треугольники Cab, Ccd, Cef и т. д. CEF, въ которыхъ углы aCb, cCd, eCf, ECF равны (общій уголъ), углы Cab, Ccd, Cef, CEF равны (соотвѣтствующіе углы равны, потому-что прямыя ab, cd, ef, EF параллельны) и углы Cba, Cdc, Cfe, CFE равны; слѣдовательно разсматриваемые треугольники подобны. Изъ треугольниковъ Cab и CEF вы получите пропорцію $Cb : CF = ab : EF$, въ которой $Cb = {}^1/_{10}\,CF$, потому-что прямая Cb содержитъ одну часть, а прямая CF содержитъ 10 такихъ частей; слѣдовательно непремѣнно $ab = {}^1/_{10}\,EF$, т. е. прямая ab есть десятая часть 10 саженъ или $ab = 1$ сажени. Изъ подобныхъ треугольниковъ Cab и Ccd получится пропорція $Cb : Cd = ab : cd$, въ которой Cd вдвое болѣе Cb; слѣдовательно и cd вдвое болѣе ab, т. е. $cd = 2$ саженямъ. Изъ подобныхъ треугольниковъ Cab и Cef вы узнаете, что $ef = 3$ саженямъ; потомъ $gh = 4$ саж., $mn = 5$ саж. и т. д. Теперь вамъ вѣроятно понятно значеніе цифръ 1, 2, 3 и т. д., написанныхъ подлѣ наклонной CE. Какъ по этому масштабу отложить 28 саженъ? — Разстояніе между C и K равно 20 саженямъ и часть 8-ой параллельной между 2-мъ перпендикуляромъ и наклонною CE равна 8 саж.; слѣдовательно поставивъ одну ножку циркуля на перпендикулярѣ, подписанномъ цифрою 20, въ пересѣченіи съ 8-ою параллельною, а другую ножку въ пересѣченіи той-же параллельной съ наклонною EC, вы получите раствореніе циркуля, равное по масштабу 28 саженямъ.

§ 62. Начертите масштабъ, по которому возможно откладывать сотыя доли дюйма. На какой-нибудь прямой (фиг. 81) отложите части AC, CD и т. д., равныя 1 дюйму, и къ ней возставьте перпендикуляры изъ точекъ A, C, D и т. д. Раздѣлите часть AC на 10 равныхъ частей и на крайнемъ перпендикулярѣ отложите 10 равныхъ частей. Чрезъ точки этого перпендикуляра проведите прямыя параллельно къ AB и соедините наклонною оконечную точку G крайняго перпендикуляра съ 9-ою точкою части AC. Наконецъ проведите прямыя чрезъ точки 1, 2, 3, 4 и т. д. части AC параллельно къ наклонной. По предъидущему § вамъ извѣстно, что $ab = \frac{1}{10}$ EF, $cd = 2ab$, $ef = 3ab$, $gh = 4ab$ и т. д. Часть EF содержится 10 разъ въ AC, и частица ab содержится 10 разъ въ EF; слѣдовательно частица ab содержится 10-ю 10 разъ или 100 разъ въ прямой AC. Откуда вы заключаете, что $ab = \frac{1}{100}$ AC, $cd = \frac{2}{100}$ AC, $ef = \frac{3}{100}$ AC, $gh = \frac{4}{100}$ AC и т. д. Предположите, что прямая AC представляетъ 100 саженъ; тогда EF = 10 саж., т. е. десятой долѣ ста саженъ, $ab = 1$ саж., т. е. сотой долѣ ста саженъ, $cd = 2$ саж., $ef = 3$ саж., $gh = 4$ саж. и т. д. Цифры, стоящія подъ прямою AC, означаютъ 1 десятокъ, 2, 3, 4 десятка и т. д. саженей, а цифры, поставленныя подлѣ прямой AG, принадлежатъ частицамъ ab, cd, ef и т. д. Какъ по этому масштабу отложить 287 саженъ? — Эти 7 саженъ должны находиться на 7-ой параллельной, 80 саженъ должно взять на 8-ой наклонной и наконецъ 200 саженъ вы возьмете на перпендикулярѣ, подписанномъ циф-

фиг. 81.



рою 200. На этомъ основаніи одна ножка циркуля должна быть поставлена въ точкѣ пересѣченія перпендикуляра BK съ 7-ою параллельною, а другая ножка въ точкѣ пересѣченія той-же параллельной съ 8-ою наклонною; это раствореніе циркуля представляетъ 287 сажень. Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе между перпендикулярами CF и BK равно 200 саж., разстояніе между 8-ою наклонною и прямою CE равно 80 саж. и 7-ая частица между прямыми CE и CF равна 7 саж. Этотъ масштабъ, дающій сотыя части дюйма, называется *сотеннымъ*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

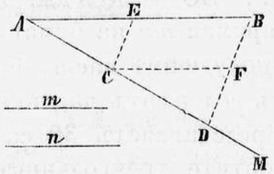
1) Какіе треугольники называются подобными? — 2) Почему два треугольника, въ которыхъ соотвѣтствующіе углы равны, не всегда бываютъ равными? — 3) Когда два многоугольника подобны? — 4) Что значитъ: соотвѣтствующія стороны двухъ треугольниковъ пропорціональны? — 5) Почему треугольники ABC и LOC (фиг. 75) подобны, когда прямыя AB и LO параллельны? — 6) Если продолжить прямыя AB и CB (фиг. 77) и эти продолженія пересѣчь прямою GH параллельно къ AC, то почему треугольникъ GBH будетъ подобенъ треугольнику ABC? — могутъ-ли эти треугольники быть равными? — 7) Къ чему служатъ масштабы? — Какіе бываютъ масштабы? — 8) Сколько футовъ должно принять въ дюймѣ масштаба, чтобы линіи на бумагѣ были въ 60 разъ меньше соотвѣтствующихъ имъ линій въ натурѣ? — 9) Сколько сажень должно принять въ дюймѣ масштаба, чтобы линіи на бумагѣ были въ 84 раза меньше соотвѣтствующихъ имъ линій въ натурѣ? — 10) Прямая AC = 36 саж. (фиг. 75), CL = 15 саж. и BC = 28 саж.; сколько сажень въ прямой CO? — 11) Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и abc сторона AB = 32 саж., ab = 4 саж. и AC = 42 саж.; сколько сажень въ прямой ac? — 12) Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и abc сторона AB = 35 саж. и ab = 15 саж.; въ какомъ отношеніи находятся стороны AC и ac? — 13) Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и abc уг. BAC = $46^\circ30'$ и уг. abc = $63^\circ25'$; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ acb? — 14) Периметръ равносторонняго треугольника ABC равенъ 49

саж.; сколько сажень содержитъ сторона ab треугольника abc, подобнаго треугольнику ABC, когда извѣстно, что $ab = \frac{3}{10}$ AB? — 15) Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и abc сторона AB = 42 саж. и AC : ac = 7 : 6; сколько сажень въ сторонѣ ab? — 16) По масштабу (фиг. 80) начертить треугольникъ abc, подобный треугольнику ABC, когда извѣстно, что AB = 35 саж., AC = 42 саж. и BC = 26 саж. — 17) Во сколько разъ по этому масштабу сторона AB больше стороны ab? — 18) По масштабу (фиг. 80) начертить треугольникъ abc, подобный треугольнику ABC, когда извѣстно, что AB = 43 саж., BC = 38 саж. и уголъ ABC = 81°. — 19) Во сколько разъ прямая mn на бумагѣ меньше прямой MN въ натурѣ, когда въ полудюймѣ масштаба (фиг. 80) 25 сажень? — 20) Сколько сажень содержитъ частица ab (фиг. 80), когда полудюймъ масштаба представляетъ 30 сажень? — 21) По масштабу (фиг. 81) начертите треугольникъ abc, подобный треугольнику ABC, когда извѣстно, что AB = 126 саж., BC = 83 саж. и AC = 76 саж. — 22) Сколько сажень содержитъ периметръ равносторонняго треугольника abc, подобнаго треугольнику ABC, когда извѣстно, что AB = 15 саж. и AB : ab = 3 : 2? — 23) Въ двухъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и abc гипотенуза AC = 25 саж. и AB : ab = 4 : 3; сколько сажень содержитъ гипотенуза ac? — 24) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 75) прямая AL = 18 саж. и AC : CL = 7 : 3; сколько сажень въ прямой CL? — 25) По масштабу (фиг. 80) начертить многоугольникъ $abcde$ (фиг. 77), подобный многоугольнику ABCDE, когда извѣстно, что уг. BAC = 27°, уг. DAC = 35°, уг. DAE = 47°, AB = 48 саж., AC = 56 саж., AD = 52 саж. и AE = 43 саж. — 26) Начертить многоугольникъ $abcde$ (фиг. 77), подобный многоугольнику ABCDE, когда извѣстно, что AC = 63 саж., уг. BAC = 36°, уг. BAD = 74°, уг. BAE = 109°, уг. BCA = 48°, уг. BCD = 71° и AE = 57 саж. (масштабъ фиг. 81). — 27) Во сколько разъ прямая mn, начерченная на бумагѣ по масштабу (фиг. 81) меньше прямой MN въ натурѣ? — 28) Сколько сотыхъ частей дюйма содержитъ прямая mn, начерченная на бумагѣ по масштабу (фиг. 81), когда извѣстно, что длина прямой MN въ натурѣ равна 56 саженямъ? — 29) Сколько сажень содержатъ часть EF и частица

ab, когда дюймъ AC масштаба (фиг. 81) представляетъ 50 саженъ? — 30) По масштабу (фиг. 81) начертите многоугольникъ $abcde$, подобный многоугольнику ABCDE, когда извѣстно, что AC = 108 саж., AB = 76 саж., BC = 47 саж., AD = 104 саж., CD = 52 саж., DE = 56 саж. и AE = 63 саж.

§ 63. *Прямую AB раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы первая часть была во столько разъ меньше второй, во сколько разъ 4 меньше 7* (фиг. 82).

фиг. 82.



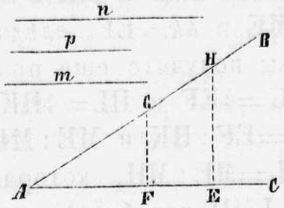
Проведите чрезъ точку A какую-нибудь прямую AM и отложите на ней 4 равныя части отъ A до C, и 7 такихъже частей отъ C до D. Потомъ соедините точки B и D прямою BD и чрезъ C проведите прямую CE параллельно къ BD — получите AE:EB=4:7. Чтобы объяснить вѣрность этой пропорціи, проведите прямую CF параллельно къ AB; тогда получится треугольникъ CDF, подобный треугольнику ACE, потому-что уг. DCF = уг. CAE (прямыя CF и AB параллельны) и уг. CDF = уг. ACE (прямыя DB и CE параллельны). Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ вы получите AC:CD=AE:CF или AC : CD=AE : EB (параллельныя прямыя CF и EB, проведенныя между параллельными BD и EC, равны); также AC : CD = 4 : 7. Изъ двухъ пропорцій AC:CD=AE:EB и AC:CD=4:7 вы получите одну пропорцію AE : EB=4:7.

Прямую AB раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы первая часть была во столько разъ меньше второй, во сколько разъ прямая m меньше прямой n (фиг. 82).

Чрезъ точку A проведите какую-нибудь прямую AM и на ней отложите часть AC, равную прямой m, и часть CD, равную прямой n. Соедините точки B и D прямою BD и чрезъ точку C проведите прямую CE параллельно къ BD — получите $AE : EB = m : n$. Въ самомъ дѣлѣ, вамъ уже извѣстно, что AE : EB=AC : CD; но $AC = m$ и $CD = n$, слѣдовательно $AE : EB = m : n$.

§ 64. *Начертить такую прямую, которая была бы во столько разъ больше прямой m, во сколько разъ прямая n больше прямой p* (фиг. 83).

фиг. 83.

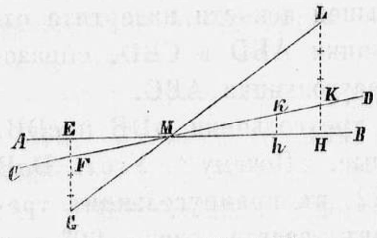


Начертите острый уголъ BAC и на его сторонѣ AC отложите части AE = прямой n и AF = прямой p. На сторонѣ AB отложите часть AG, равную прямой m, соедините точки F и G прямою FG и чрезъ точку E проведите прямую EH параллельно къ FG; тогда вы получите прямую AH, которая во столько разъ болѣе прямой m, во сколько разъ прямая n болѣе прямой p, или $AH : m = n : p$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ треугольниковъ AHE и AGF вы получите AH : AG = AE : AF; но $AG = m$, $AE = n$ и $AF = p$; слѣдовательно $AH : m = n : p$. Почему треугольники AFG и AEH подобны? —

§ 65. *Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ AB и CD, составляющихъ весьма острый уголъ* (фиг. 84).

Часто случается, что точка пересѣченія двухъ прямыхъ, проведенныхъ подъ весьма острымъ угломъ, обозначается неясно, вслѣдствіе толщины прямыхъ, начерченныхъ карандашемъ. Для полученія вѣрной точки пересѣченія возставьте перпендикуляры EG и HL въ противоположныя стороны изъ какихънибудь точекъ E и H прямой AB и замѣтьте точки пересѣченія F и K этихъ перпендикуляровъ съ прямою CD; потомъ отложите часть HK отъ K до L, хоть 3 раза, и часть EF отъ F до G тоже 3 раза; наконецъ соедините точки G и L прямою GL, которою обозначается требуемая точка M. Для объясненія вѣрности этого рѣшенія отложите часть Mh, равную ME, и чрезъ h проведите hk параллельно къ HL. Будетъ-ли прямая hk перпендикулярна къ AB и параллельна

фиг. 84.

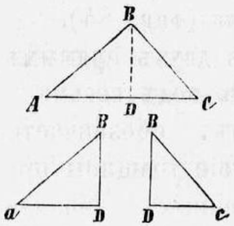


къ EG? Будутъ-ли треугольники EMF и *k*M*h* равны? Почему треугольники M*kh* и MKH подобны? Почему треугольники EMF и MKH подобны? Изъ треугольниковъ M*kh* и MKH вы получите $hM : MH = hk : HK$, но $Mh = ME$ и $hk = EF$, слѣдовательно $ME : MH = EF : HK$. Потомъ вы получите еще пропорцію $EG : HL = EF : HK$, потому-что $EG = 4EF$ и $HL = 4HK$; наконецъ изъ двухъ пропорцій $EG : HL = EF : HK$ и $ME : MH = EF : HK$ составится пропорція $EG : HL = ME : MH$, которая показываетъ, что треугольники EMG и LMH подобны, и что прямая GL проведена чрезъ точку пересѣченія прямыхъ AB, CD и GL.

§ 66. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу.

Начертите прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 85) и изъ вершины B прямаго угла опустите перпендикуляръ BD на гипотенузу AC. Этотъ перпендикуляръ раздѣляетъ треугольникъ ABC на двѣ части такъ, что треугольники ADB и CDB подобны, треугольники ABC и ABD подобны и наконецъ треугольники ABC и CDB подобны. Для большей ясности начертите отдѣльно треугольники ABD и CBD, образовавшіеся изъ треугольника ABC.

фиг. 85.



1) Сперва вы разсмотрите треугольники *a*DB и *c*DB. Въ нихъ углы *a*DB и *c*DB прямые. Почему? Уголъ D*a*B + уг. $DBa = 90^0$, потому-что (§ 22) въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма острыхъ угловъ всегда равна 90^0, и уг. $DBc +$ уг. $DBa = 90^0$, потому-что прямой уголъ ABC равенъ $DBc + DBa$. Уголъ DB*a* съ угломъ D*a*B составляетъ 90^0 и тотъ-же уголъ DB*a* съ угломъ DB*c* составляетъ также 90^0 — это возможно только въ такомъ случаѣ, когда углы D*a*B и DB*c* равны. Итакъ уг. *a*DB = уг. *c*DB и уг. D*a*B = уг. DB*c*; слѣдовательно треугольники подобны (§ 56) и уголъ *a*BD = уг. B*c*D. Въ этихъ треугольникахъ стороны BD и DC, лежащія противъ равныхъ угловъ D*a*B и DB*c*, суть соотвѣтствующія; также стороны *a*D и BD, лежащія противъ равныхъ угловъ *a*BD и B*c*D, суть соотвѣтствующія; слѣдовательно сторона *a*D изъ треуг. *a*DB относится къ сторонѣ BD изъ треуг. *c*DB точно такъ, какъ сторона BD изъ треуг. aDB относится къ сторонѣ D*c* изъ треуг. *c*DB, или $AD : BD = BD : DC$. Эта пропорція показываетъ, что большая часть гипотенузы относится къ перпендикуляру BD точно такъ, какъ этотъ-же перпендикуляръ относится къ меньшей части гипотенузы.

2) Теперь обратитесь къ треугольникамъ ABC и *a*DB. Въ нихъ уг. ABC = уг. aDB и уг. CAB = уг. D*a*B (тотъ-же самый уголъ); слѣдовательно треугольники подобны и углы ACB и *a*BD равны (§ 56). Противъ равныхъ угловъ ABC и *a*DB лежатъ соотвѣтствующія стороны AC и *a*B, и противъ равныхъ угловъ ACB и *a*BD находятся соотвѣтствующія стороны AB и *a*D; слѣдовательно сторона AC изъ треуг. ABC относится къ сторонѣ *a*B изъ треуг. *a*BD точно такъ, какъ сторона AB изъ треуг. ABC относится къ сторонѣ *a*D изъ треуг. *a*DB, или $AC : AB = AB : AD$. Эта пропорція показываетъ, что гипотенуза во столько разъ болѣе катета, во сколько разъ этотъ катетъ болѣе прилежащей къ нему части гипотенузы.

3) Остается вамъ еще разсмотрѣть треугольники ABC и *c*DB. Въ нихъ уг. ABC = уг. BD*c* и уг. ACB = уг. D*c*B (общій уголъ); слѣдовательно треугольники подобны и углы BAC и DB*c* равны. Противъ равныхъ угловъ ABC и BD*c* лежатъ соотвѣтствующія стороны AC и B*c*, и противъ равныхъ угловъ BAC и DB*c* находятся соотвѣтствующія стороны BC и D*c*; слѣдовательно вы получите пропорцію $AC : Bc = BC : Dc$ или $AC : BC = BC : DC$, т. е. гипотенуза во столько разъ болѣе катета, во сколько разъ этотъ-же катетъ больше прилежащей къ нему части гипотенузы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

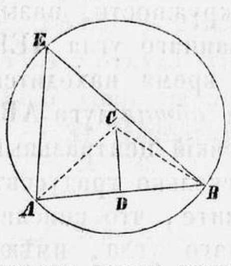
1) Прямую AB, равную по масштабу (фиг. 81) 236 саж., раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы первая часть была во столько разъ больше второй, во сколько разъ 8 больше 5. — 2) Сколько сажень должна содержать каждая изъ этихъ частей прямой AB? — 3) По масштабу (фиг. 81) прямая AB=195 саж., m=72 саж. и n=56 саж. (ф. 82). Раздѣлить прямую AB на двѣ части такъ, чтобы первая часть была во столько разъ меньше второй, во сколько разъ прямая m больше прямой n. — 4) Сколько сажень должна содержать каждая изъ частей прямой AB? — 5) По масштабу (фиг. 81) прямая m=42 саж., n=65 саж. и p=83 саж. (фиг. 83). Начертить такую прямую AB, чтобы она была во столько разъ болѣе прямой n, во сколько разъ прямая p болѣе m. — 6) Сколько сажень должна содержать эта прямая AB? — 7) На какія части раздѣляется прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 85) перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямаго угла на гипотенузу? — 8) Можетъ-ли этотъ перпендикуляръ раздѣлить треугольникъ ABC на два равные треугольника? — сколько градусовъ долженъ содержать тогда каждый изъ угловъ BAC и ACB? — 9) По масштабу (фиг. 81) начертить такой прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 85), въ которомъ AD =39 саж. и BD=24 саж. — 10) Почему перпендикуляръ BD въ одно и то-же время не можетъ быть больше (или меньше) каждой изъ прямыхъ AD и CD? — 11) Можетъ-ли перпендикуляръ BD равняться каждой изъ прямыхъ AD и CD? — въ какомъ именно случаѣ? — что тогда будетъ съ пропорціями AD : BD= BD : DC, AC : AB=AB : AD, AC : BC=BC : CD? — 12) Можетъ-ли катетъ AB равняться прямой AD?

ОТДѢЛЪ V.

Линіи и углы въ кругѣ. Начертаніе кривыхъ линій и правильныхъ многоугольниковъ. Вычисленіе окружности круга.

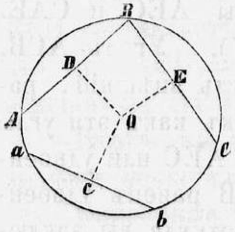
§ 67. Какимъ-нибудь радіусомъ опишите окружность изъ точки C и проведите хорду AB (фиг. 86). Раздѣлите прямую AB въ точкѣ D по-поламъ и соедините точки C и D прямою CD; эта прямая должна быть перпендикулярна къ хордѣ AB. Для объясненія этой перпендикулярности проведите радіусы AC и BC — получатся два равные треугольника ADC и BDC, потому-что сторона CD общая, AC = BC (почему?) и AD = BD (почему?); откуда уг. ADC= уг. BDC. Такъ какъ два смежные угла только тогда равны (§ 11), когда они прямые, то прямая CD перпендикулярна къ AB. Откуда вы заключаете, что *прямая CD, соединяющая центръ C съ срединою D хорды, перпендикулярна къ этой хордѣ, и что перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, раздѣляетъ ее по-поламъ.*

фиг. 86.



§ 68. *Чрезъ три точки A, B, C провести окружность.* Соедините точку B (фиг. 87) съ точками A и C прямыми BA и BC. Такъ какъ окружность должна пройти чрезъ точки A, B, C, то прямыя AB и BC будутъ хордами. Изъ средины D возставьте перпендикуляръ къ хордѣ AB — на немъ долженъ находиться центръ окружности. Изъ средины E возставьте къ хордѣ BC перпендикуляръ — на немъ также долженъ находиться центръ окружности. Центръ, лежащій на прямыхъ DO и EO, долженъ находиться въ точкѣ O ихъ пересѣченія.

фиг. 87.



Какъ найти центръ окружности, начерченной на бумагѣ?

*

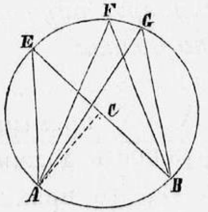
Проведите хорду *ab* (фиг. 87) и изъ ея средины возставьте перпендикуляръ *c*O. Потомъ проведя еще хорду AB, вы раздѣлите ее въ точкѣ D по-поламъ и возставите изъ D перпендикуляръ DO. Въ точкѣ O пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ центръ. — (Почему?).

§ 69. Центральные и вписанные углы.

Проведя два радіуса CA и CB (фиг. 86), вы получите уголъ ACB, коего вершина находится въ центрѣ C окружности и между сторонами котораго заключается дуга AB; такой уголъ называется *центральнымъ*. Уголъ AEB, образуемый двумя хордами EA и EB, пересѣкающимися на окружности, называется *вписаннымъ*. Между сторонами вписаннаго угла AEB заключается дуга AB, которая въ тоже время находится между сторонами угла ACB; у этихъ угловъ *общая* дуга AB. По предъидущему (§ 12) вы знаете, что всякій центральный уголъ ACB содержитъ столько градусовъ, сколько градусовъ находится въ дугѣ AB. Теперь вы объясните, что вписанный уголъ составляетъ половину центральнаго угла, имѣющаго съ нимъ общую дугу.

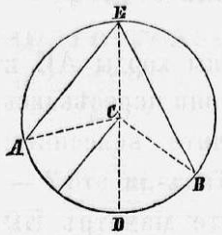
1) Начертите вписанный уголъ AEB (фиг. 88) такъ, чтобы его сторона EB прошла чрезъ центръ C окружности. Проведя радіусъ AC, вы получите центральный уголъ ACB, имѣющій общую дугу AB съ угломъ AEB. Потомъ образуется еще треугольникъ ACE, въ которомъ стороны AC и EC равны (радіусы) и также равны углы AEC и CAE, находящіеся противъ этихъ сторонъ (§ 27). Уголъ ACB, который относительно треугольника ACE есть внѣшній, равенъ суммѣ угловъ AEC и CAE (§ 22). Такъ какъ эти углы равны, то ихъ сумма равна удвоенному углу AEC или удвоенному углу AEB; слѣдовательно уголъ ACB равенъ удвоенному углу AEB, т. е. уг. ACB=2AEB; откуда вы заключаете, что уголъ AEB составляетъ половину угла ACB.

Фиг. 88.



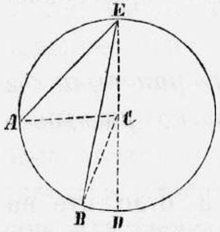
2) Начертите вписанный уголъ AEB (фиг. 89) такъ, чтобы центръ C окружности пришелся внутри угла. Чрезъ вершину E проведите діаметръ ED и чрезъ точки A и B радіусы AC и BC; тогда у васъ образуются вписанные углы AED и BED и центральные углы ACD и BCD. Вамъ уже извѣстно, что уг. ACD=2AED и уг. BCD=2BED, потому-что сторона ED вписанныхъ угловъ проходитъ чрезъ центръ; но такъ какъ уг. ACD+уг. BCD=уг. ACB и уг. AED+уг. BED = уг. AEB, и удвоенный уголъ AED съ удвоеннымъ угломъ BED составляетъ удвоенный уголъ AEB, то уголъ ACB = 2AED + 2BED или уг. ACB равенъ удвоенному углу AEB, откуда уг. ACB вдвое больше угла AEB и уголъ AEB вдвое меньше угла ACB.

Фиг. 89.



3) Начертите вписанный уголъ AEB (фиг. 90) такъ, чтобы центръ C окружности пришелся внѣ угла. Чрезъ вершину E проведите діаметръ ED и чрезъ точки A и B радіусы AC и BC — получатся у васъ вписанные углы AED и BED, и центральные углы ACD и BCD. Такъ какъ сторона ED вписанныхъ угловъ AED и BED проходитъ чрезъ центръ, то уг. ACD = 2AED и уг. BCD=2BED; но уг. ACD безъ уг. BCD = уг. ACB, и уг. AED безъ уг. BED = уг. AEB, слѣдовательно уг. ACB = удвоенному уг. AED безъ удвоеннаго уг. BED; удвоенный уг. AED безъ удвоеннаго уг. BED составляетъ удвоенный уг. AEB; откуда вы заключаете, что уг. ACB = удвоенному уг. AEB, или уг. ACB вдвое больше уг. AEB и уг. AEB вдвое меньше уг. ACB.

Фиг. 90.

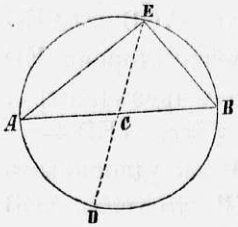


Итакъ вы видите, что *вписанный уголъ всегда вдвое меньше центральнаго угла, имѣющаго съ нимъ общую дугу.*

Вписанные углы AEB, AFB, AGB (фиг. 88), имѣющіе общую дугу AB, равны. Въ самомъ дѣлѣ, уг. ACB = 2AEB, уг. ACB = 2AFB, уг. ACB = 2AGB, т. е. одинъ и тотъ-же уголъ ACB равняется каждому изъ удвоенныхъ вписанныхъ угловъ — что возможно только въ такомъ случаѣ, когда эти углы равны.

Проведя діаметръ AB и чрезъ его концы хорды AE и BE (фиг. 91) такъ, чтобы они пересѣклись на окружности, вы получите вписанный уголъ AEB, равный 90°. Такъ-ли это? — Чрезъ вершину E проведите діаметръ ED — получатся два вписанные угла AED и BED, которые вмѣстѣ составляютъ уголъ AEB. Вы уже знаете, что уг. ACD = удвоенному углу AED, уг. BCD = удвоенному уг. BED и уг. ACD + уг. BCD = 180° (§ 22); слѣдовательно удвоенный уг. AED + удвоенный уг. BED=180°, или удвоенный уг. AEB = 180°, откуда уг. AEB = 90°. Итакъ вы узнали, что *всякій вписанный уголъ, коего стороны проходятъ чрезъ оконечности діаметра, есть прямой.*

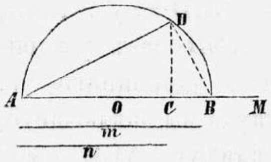
фиг. 91.



§ 70. *Начертить такую прямую, которая была бы во столько разъ меньше прямой m, во сколько разъ она-же больше прямой n* (фиг. 92).

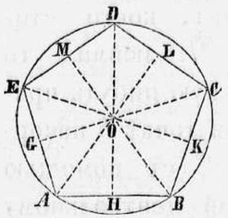
Проведите какую-нибудь прямую AM и отложите на ней часть AB, равную *m*, и часть AC, равную *n*. Изъ средины O прямой AB опишите полуокружность радіусомъ OA, изъ точки C возставьте перпендикуляръ CD къ AB и соедините точки A и D прямою AD; тогда $AB : AD = AD : AC$ или $m : AD = AD : n$ (потому-что $AB = m$ и $AC = n$). Въ самомъ дѣлѣ, проведя хорду BD, вы получите прямой уголъ ADB (§ 69), потому-что его вершина находится на окружности и его стороны проведены чрезъ оконечности діаметра. Такъ какъ изъ D прямаго угла опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу, то по предъидущему (§ 66, 2) составится пропорція $AB : AD = AD : AC$.

фиг. 92.



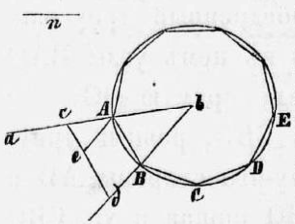
§ 71. Центральные углы правильныхъ многоугольниковъ. Если въ правильномъ многоугольникѣ ABCDE (фиг. 93) вы раздѣлите два ближайшіе угла BAE и ABC по-поламъ, то прямыми AO и BO образуется равнобедренный треугольникъ ABO, потому-что въ немъ углы BAO и ABO равны. Проведя прямую OC, вы получите треугольникъ CBO, равный треугольнику ABO, потому-что стороны AB и BC равны, сторона BO общая и уг. CBO = уг. ABO; слѣдовательно треугольникъ CBO равнобедренный и CO = BO. Такимъ-же образомъ вы узнаете, что треугольники CDO и CBO равны, треугольники DEO и CDO равны и т. д.; слѣдовательно стороны AO, BO, CO, DO и т. д. равны. По этому если изъ точки O радіусомъ OA вы опишете окружность, то она непремѣнно пройдетъ чрезъ всѣ вершины многоугольника. Откуда вы заключаете, что вершины правильнаго многоугольника лежатъ на окружности, коей центръ есть точка пересѣченія прямыхъ, раздѣляющихъ два угла многоугольника по-поламъ. Точка O, равно-отстоящая отъ вершинъ правильнаго многоугольника, называется его *центромъ*. Прямыя, которыми углы многоугольника раздѣляются по-поламъ, образуютъ около центра O равные углы, потому-что образовавшіеся треугольники ABO, CBO, DCO и т. д. равны. Вамъ уже извѣстно (§ 14), что сумма угловъ, расположенныхъ около точки O, должна равняться 360°; слѣдовательно одинъ изъ этихъ равныхъ угловъ долженъ содержать во столько разъ меньше 360°, сколько угловъ помѣщено около точки O; такъ, напримѣръ, для правильнаго пятиугольника уголъ AOB = $\frac{360^0}{5}$ или уг. AOB = 72°, для правильнаго шестиугольника уг. AOB = $\frac{360^0}{6}$ или уг. AOB=60° и т. д. Углы AOB, BOC и т. д. называются *центральными углами* многоугольника.

фиг. 93.



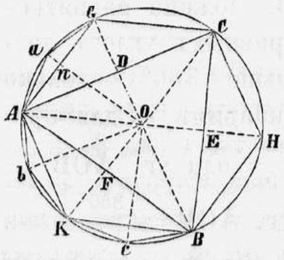
§ 72. Начертаніе правильныхъ многоугольниковъ. Центральный уголъ даетъ возможность начертить какой угодно правильный многоугольникъ. Если вы желаете начертить, напримѣръ, правильный девятиугольникъ, коего сторона должна равняться $^1/_2$ дюйма, то вы сперва проведете какую-нибудь прямую *ab* (фиг. 94) и при точкѣ *b* начертите уголъ *abd* въ 40^0 (съ помощью транспортира), равный центральному углу правильнаго девятиугольника; на сторонахъ этого угла вы отложите какія-нибудь равныя части *bc* и *bd* и соедините точки *c* и *d* прямою *cd*. Потомъ вы отложите $^1/_2$ дюйма отъ *d* до *e* и проведете прямую *e*A параллельно къ *bd* и прямую AB параллельно къ *cd*. Почему прямыя *b*A и *b*B должны быть равны? — Почему прямая AB равна $^1/_2$ дюйма? — Наконецъ изъ точки *b* радіусомъ *b*A вы опишете окружность и на ней отложите 8 хордъ BC, CD, DE и т. д., равныхъ хордѣ AB.

фиг. 94.



§ 73. Для начертанія правильныхъ многоугольниковъ употребляются способы, не требующіе транспортира. Нѣкоторые изъ этихъ способовъ такъ просты, что они вѣрно будутъ вамъ понятны.

фиг. 95.

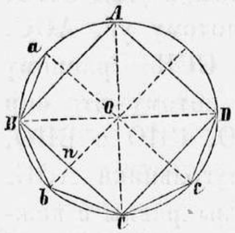


На какой-нибудь прямой AC (фиг. 95) начертите равносторонный треугольникъ ABC, раздѣлите въ немъ углы BAC и ACB прямыми AO и CO по-поламъ и соедините точки O и B прямою OB; тогда, какъ вамъ уже извѣстно (§ 71) образуются равные равнобедренные треугольники ACO, ABO, BCO, въ которыхъ стороны AO, BO, CO равны и углы AOC, AOB, BOC равны. Изъ точки O радіусомъ OA опишите окружность и изъ центра O опустите перпендикуляры OD, OE, OF на стороны AC, BC, AB; эти перпендикуляры, какъ вамъ извѣстно (§ 27), раздѣляютъ углы AOC, AOB, BOC по-поламъ. Такъ какъ углы AOC, AOB, BOC равны, то и ихъ половины равны, т. е. углы AOD, DOC, COE и т. д. равны. Продолживъ прямыя OD, OE, OF до пересѣченія съ окружностью и проведя прямыя AG, GC, CH и т. д., вы получите правильный шестиугольникъ AGCHBK. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники AOG, GOC, COH и т. д. равны, потому-что стороны AO, GO, CO, HO и т. д. равны (радіусы) и углы AOG, COG, COH и т. д. равны; слѣдовательно прямыя AG, GC, CH и т. д. равны и углы OAG, OGA, OGC, OCG, OCH и т. д. равны; а потому уг. AGC, равный уг. AGO + уг. CGO, равенъ углу GCH, равному уг. GCO + уг. HCO, уг. GCH = уг. CHB, потому-что они составлены изъ равныхъ угловъ GCO и HCO, CHO и BHO, уг. CHB = уг. HBK и т. д. Такъ какъ треугольники AOG, GOC, COH и т. д. равны, то центральные углы равны и каждый изъ нихъ содержитъ $\frac{360^0}{6}$ или 60^0; слѣдовательно у васъ получился правильный шестиугольникъ. Въ равныхъ треугольникахъ AGO, CGO, CHO и т. д. углы GAO, AGO, CGO, GCO и т. д. равны, потому-что они находятся противъ равныхъ сторонъ; слѣдовательно каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться 60^0. Почему? Значитъ: треугольники AGO, CGO, CHO и т. д. равносторонные, а потому радіусъ AO равенъ сторонѣ AG. Итакъ вы узнали, что для полученія правильнаго шестиугольника должно отложить на окружности ея радіусъ шесть разъ: отъ A до G, G до C, C до H и т. д.

Изъ центра O опустите перпендикуляры на стороны AG, AK, KB и т. д. до пересѣченія *a*, *b*, *c* и т. д. съ окружностью, и проведите прямыя A*a*, *a*G, A*b*, *b*K и т. д. — получите правильный двѣнадцатиугольникъ. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя O*a*, O*b*, O*c* и т. д. раздѣляютъ углы AOG, AOK, BOK и т. д. по-поламъ и потому треугольники AO*a*, *a*OG, AO*b* и т. д. равны; откуда вы узнаете, что прямыя *a*A, *a*G, A*b* и т. д. равны, углы A*a*O, G*a*O, A*b*O, K*b*O и т. д. равны, также углы A*a*O, G*a*O, *a*AO, *a*GO и т. д. равны и наконецъ уголъ AO*a*, равный половинѣ угла AOG, равенъ 30°. Точно такимъ-же образомъ, какъ изъ правильнаго шестиугольника получился правильный двѣнадцатиугольникъ, вы получите правильный многоугольникъ съ 24 сторонами изъ правильнаго двѣнадцатиугольника, правильный многоугольникъ съ 48 сторонами изъ правильнаго многоугольника съ 24 сторонами и т. д.

§ 74. Проведите въ кругѣ два взаимно-перпендикулярные діаметра AC и BD (фиг. 96) и хорды AB, BC, CD, AD; тогда образуются равные треугольники ABO, CBO, CDO, ADO (почему они равны?), въ которыхъ стороны AB, BC, CD и AD равны. Углы BAD, ABC, BCD, ADC прямые, потому-что ихъ вершины находятся на окружности и стороны проведены чрезъ концы діаметровъ (§ 69); по этому вы заключаете, что образовавшійся четыреугольникъ ABCD есть квадратъ; слѣдовательно *въ квадратѣ діагонали пересѣкаются подъ прямыми углами.* Изъ центра O опустите перпендикуляры на стороны квадрата до пересѣченія *a*, *b*, *c* съ окружностью; тогда по предъидущему углы AOB, BOC, COD раздѣлятся по-поламъ и получатся равные треугольники *a*OB, BO*b*, *b*OC, CO*c* и т. д. (почему они равны?); слѣдовательно стороны *a*B, B*b*, *b*C и т. д. равны, углы *a*BO, *b*BO, B*b*O, C*b*O и т. д. равны и уг. *a*B*b* (равный *a*BO+*b*BO) = уг. B*b*C (равному B*b*O + C*b*O), уг. B*b*C = уг. *b*C*c* (равному *b*CO+*c*CO) и т. д.; наконецъ центральный уголъ BO*b*, равный половинѣ угла BOC, равенъ 45°. Отсюда вы заключаете, что прямыя *a*B, B*b*, *b*C и т. д. суть стороны правильнаго восьмиугольника. Точно такимъ-же образомъ, какъ изъ квадрата образовался правильный восьмиугольникъ, вы получите изъ восьмиугольника правильный многоугольникъ съ 16 сторонами и т. д.

фиг. 96.



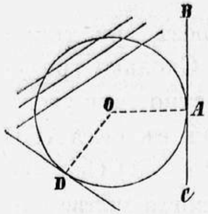
Многоугольникъ, стороны котораго суть хорды окружности, называется *вписаннымъ въ окружности многоугольникомъ.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Почему нельзя провести окружность чрезъ три точки A, B, C, находящіяся на одной прямой? — 2) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ AFB (фиг. 88), когда извѣстно, что уголъ ACB=107° 30′? — 3) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ACB (фиг. 88), когда извѣстно, что уголъ AGB=56° 43′? — 4) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ AEB (фиг. 89), когда извѣстно, что уголъ BED=27° 15′ и уголъ ACD=89° 56′? — 5) Предположите, что уголъ AEB=135° 28′ (фиг. 89); сколько градусовъ и минутъ содержитъ тогда уголъ ACB? — 6) Какъ узнать, будетъ-ли вписанный уголъ прямой? — 7) Дуга AD (фиг. 90) относится къ дугѣ BD точно такъ, какъ 7 относится къ 5, и уголъ BCD=29°; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ AEB? — 8) Дуга AD (фиг. 91) = 38° 52′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BED? — 9) По масштабу (фиг. 81) начертите прямую, которая была бы во столько разъ меньше прямой *m*, равной 136 саж., во сколько разъ она-же больше прямой *n*, равной 78 саж. — 10) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC (фиг. 93)? — 11) Сколько градусовъ содержитъ центральный уголъ правильныхъ многоугольниковъ съ 7-ю, 10-ю, 15-ю, 16-ю, 18-ю сторонами? — 12) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC (фиг. 94) правильныхъ многоугольниковъ съ 7-ю, 8-ю, 9-ю, 10-ю, 12-ю, 20-ю сторонами? — 13) Начертите правильный шестиугольникъ, коего сторона должна равняться $^3/_4$ вершка. — 14) Начертите правильный двѣнадцатиугольникъ, коего сторона должна равняться $^1/_2$ дюйма (см. фиг. 94). — 15) Начертите квадратъ, коего діагональ должна равняться 128 саж. по масштабу (фиг. 81). — 16) Начертите правильный восьмиугольникъ, коего сторона должна равняться $^1/_4$ дюйма. — 17) Съ помощью равносторонняго треугольника, коего сторона равна $1^1/_2$ дюймамъ, начертите правильный двѣнадцатиугольникъ. — 18) Съ помощью квадрата, коего сторона равна $1^1/_4$ дюйма, начертите правильный многоугольникъ съ 16 сторонами.

§ 75. Сѣкущая. Касательная къ окружности. *Сѣкущею* называется такая прямая (фиг. 97), которая пересѣкаетъ окружность; часть сѣкущей между точ-

Фиг. 97.

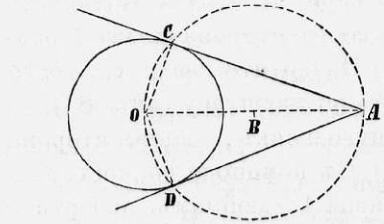


ками окружности есть хорда, которая бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ разстояніе сѣкущей отъ центра меньше, и на оборотъ: тѣмъ меньше, чѣмъ это разстояніе больше. Прямая BC, имѣющая съ окружностью только одну общую точку, т. е. касающаяся къ окружности, называется *касательною*.

Всѣ точки касательной, кромѣ одной точки A, лежатъ внѣ окружности, а потому точка A ближе всѣхъ точекъ касательной отстоитъ отъ центра O; слѣдовательно радіусъ OA, проходящій чрезъ *точку касанія* A, есть кратчайшее разстояніе между касательною и центромъ; но вамъ извѣстно, что перпендикуляромъ означается кратчайшее разстояніе между точкою и прямою; слѣдовательно радіусъ OA долженъ быть перпендикуляренъ къ касательной. Основываясь на этомъ, вы проведете касательную чрезъ точку D, находящуюся на окружности, слѣдующимъ образомъ: соединивъ точку D съ центромъ O прямою DO, вы возставите къ ней перпендикуляръ изъ точки D.

Какъ изъ точки A, находящейся внѣ окружности, провести касательную? — Соедините точку A съ центромъ O прямою AO (фиг. 98) и раздѣлите AO по-поламъ. Изъ средины B радіусомъ BO опишите окружность, которая пересѣчетъ начерченную окружность въ точкахъ C и D. Наконецъ проведите прямыя AC и AD. Будутъ-ли эти прямыя касаться къ окружности? — Углы ACO и ADO прямые, потому-что ихъ вершины находятся на окружности и ихъ стороны проходятъ чрезъ концы діаметра OA; откуда вы заключаете, что прямыя AC и AD, проходящіе чрезъ точки C и D заданной окружности, перпендикулярны къ радіусамъ OC и OD.

Фиг. 98.

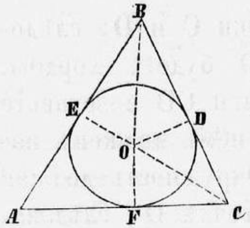


Касательными AC и AD образуется уголъ CAD, который раздѣляется прямою OA по-поламъ, потому-что треугольники AOC и AOD равны. Откуда вы видите, что центръ O окружности, касающейся къ сторонамъ угла CAD, долженъ находиться на прямой OA, раздѣляющей этотъ уголъ на двѣ равныя части.

Чтобы провести окружность, касающуюся къ сторонамъ угла CAD, вы раздѣлите этотъ уголъ прямою AO по-поламъ и изъ какой-нибудь точки O этой прямой опустите перпендикуляры OC и OD на стороны AC и AD.

Для окружности, касающейся къ сторонамъ AB и BC треугольника ABC (фиг. 99), центръ долженъ находиться на прямой, раздѣляющей уголъ ABC по-поламъ; а центръ окружности, которая должна касаться къ сторонамъ AC и BC, долженъ находиться на прямой, раздѣляющей уголъ ACB по-поламъ; слѣдовательно центръ окружности, касающейся къ тремъ сторонамъ треугольника, долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія O прямыхъ, раздѣляющихъ углы ABC и ACB по-поламъ. Для полученія радіуса этой окружности вы опустите перпендикуляръ изъ точки O на одну изъ сторонъ треугольника. Такъ какъ окружность касается къ сторонамъ AB и AC, то ея центръ долженъ также находиться на прямой, раздѣляющей уголъ BAC по-поламъ. Откуда слѣдуетъ, что прямыя, которыми раздѣляются углы треугольника по-поламъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

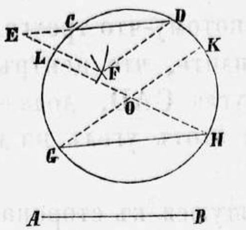
Фиг. 99.



§ 76. *Параллельно къ хордѣ CD провести хорду, равную прямой AB* (фиг. 100).

Продолживъ хорду DC, вы отложите часть DE, равную AB, и изъ точекъ D и E опишете дуги радіусомъ OK окружности. Проведите прямыя EF и DF и чрезъ центръ два діаметра: KG параллельно къ DF, и LH параллельно къ EF. Наконецъ соедините точки G и H прямою GH. Бу-

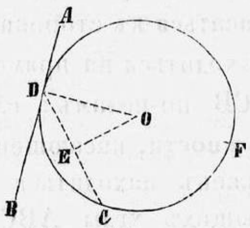
фиг. 100.



детъ-ли GH требуемая хорда? — Треугольники GHO и DEF равны, потому-что углы GOH и DFE равны (ихъ стороны EF и OH, DF и OG параллельны) и стороны EF, DF, GO, HO равны; слѣдовательно GH = DE или GH = AB. Такъ какъ углы OGH и EDF равны и ихъ стороны OG и DF параллельны, то и стороны GH и DE должны быть параллельны.

§ 77. *Начертить окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ точку C и касалась къ прямой AB въ точкѣ D* (фиг. 101).

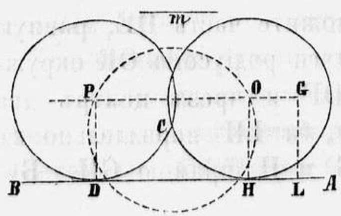
фиг. 101.



Окружность должна пройти чрезъ точки C и D; слѣдовательно прямая CD будетъ хордою. Изъ средины E прямой CD возставьте перпендикуляръ; на немъ долженъ находиться центръ. Окружность должна касаться къ AB въ точкѣ D; слѣдовательно центръ долженъ находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ D къ AB. Итакъ центръ долженъ находиться на двухъ прямыхъ; слѣдовательно онъ придется въ ихъ точкѣ пересѣченія O, изъ которой вы опишете окружность радіусомъ OD.

§ 78. *Радіусомъ, равнымъ прямой m, описать окружность, которая должна пройти чрезъ точку C и касаться къ прямой AB* (фиг. 102).

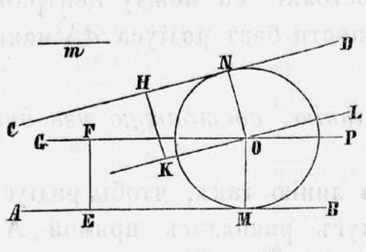
фиг. 102.



Изъ точки C опишите окружность радіусомъ, равнымъ прямой *m*, и изъ какой-нибудь точки L прямой AB возставьте перпендикуляръ LG, равный *m*. Чрезъ точку G проведя прямую параллельно къ AB, вы получите точки пересѣченія O и P съ окружностью. Изъ этихъ точекъ опустите перпендикуляры OH и PD на AB и опишите двѣ окружности изъ точекъ O и P радіусами OH и PD. Эти окружности касаются къ прямой AB, проходятъ чрезъ точку C и имѣютъ радіусъ, равный прямой *m*.

§ 79. *Радіусомъ, равнымъ прямой m, описать окружность, касающуюся къ прямымъ AB и CD* (фиг. 103).

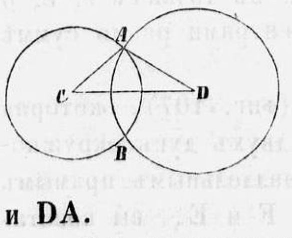
фиг. 103.



Изъ какой-нибудь точки E прямой AB возставьте перпендикуляръ EF, равный прямой *m*, и чрезъ точку F проведите прямую GP параллельно къ AB. Изъ какой-нибудь точки H прямой CD возставьте перпендикуляръ HK, равный прямой *m*, и чрезъ K проведите прямую KL параллельно къ CD. Изъ точки O пересѣченія прямыхъ GP и KL опустите перпендикуляры OM и ON на прямыя AB и CD, и изъ O опишите окружность радіусомъ OM (или ON). Эта окружность, касающаяся къ прямымъ AB и CD, имѣетъ радіусъ, равный прямой *m*, потому-что ON или HK = *m*, и OM или EF = *m*.

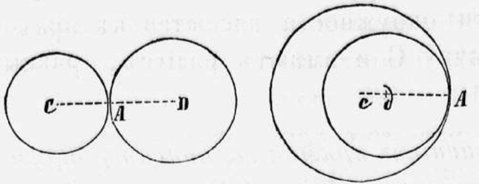
§ 80. **Пересѣкающіяся и касающіяся окружности.** Двѣ окружности *пересѣкаются*, когда у нихъ двѣ общія точки A и B (фиг. 104). Соедините центры C и D прямою CD и проведите радіусы CA и DA; тогда понятно, что прямая CD короче ломанной CAD, проведенной между тѣми-же точками C и D, или разстояніе CD между центрами окружностей меньше суммы радіусовъ CA и DA.

фиг. 104.



Двѣ окружности касаются, когда у нихъ только одна общая точка; эта точка находится на прямой CD, соединяю-

фиг. 105.

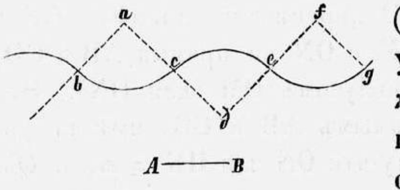


щей центры, когда окружности касаются *изъ-внѣ*; тогда разстояніе CD между центрами равно суммѣ радіусовъ CA и DA окружностей.

Точка касанія A окружностей находится на продолженіи прямой *cd*, соединяющей центры *c* и *d*, когда окружности касаются *изъ-внутри*; тогда разстояніе *cd* между центрами равно радіусу *c*A большей окружности безъ радіуса *d*A меньшей окружности.

§ 81. *Начертить кривую линію, состоящую изъ дугъ окружностей.*

фиг. 106.



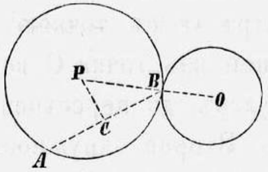
Требуется начертить кривую линію такъ, чтобы радіусы ея дугъ равнялись прямой AB (фиг. 106). Начертите прямой уголъ и на его сторонахъ отложите части *ab* и *ac*, равныя прямой AB, и на продолженіи стороны *ac* еще такую-же часть *cd*. Изъ точки *d* возставьте къ прямой *ad* перпендикуляръ и на немъ отложите части *de* и *ef*, равныя AB; изъ точки *f* возставьте къ прямой *df* перпендикуляръ и на немъ отложите часть *fg*, равную AB и т. д. Наконецъ изъ точекъ *a*, *d*, *f* и т. д. опишите дуги *bc*, *ce*, *eg* и т. д. радіусами *ab*, *dc*, *fe* и т. д.; эти дуги касаются въ точкахъ *c*, *e*, *g* и т. д., потому-что разстояніе между центрами равно суммѣ радіусовъ.

фиг. 107.

Чтобы начертить кривую линію (фиг. 107), которая должна состоять изъ двухъ дугъ окружности и касаться къ параллельнымъ прямымъ AB и CD въ точкахъ F и E, вы возставите перпендикуляры EO и FP къ этимъ прямымъ, соедините точки E и F прямою EF и раздѣлите ее на 4 равныя части. Потомъ вы возставите къ EF перпендикуляры GO и HP до пересѣченія O и P съ перпендикулярами EO и FP, и изъ точекъ O и P опишете дуги радіусами OE и PF. Какъ объяснить равенство этихъ радіусовъ? Будутъ-ли начерченныя дуги касаться между собою и къ прямымъ AB и CD?

§ 82. *Описать окружность, проходящую чрезъ точку A и касающуюся къ начерченной окружности въ точкѣ B* (фиг. 108).

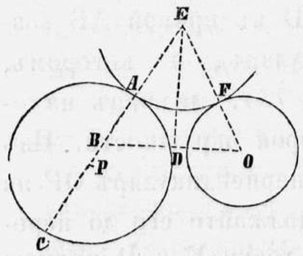
фиг. 108.



Чрезъ точку B и центръ O окружности проведите прямую; на этой прямой, какъ вамъ извѣстно (§ 80), долженъ находиться центръ второй окружности. Такъ какъ эта окружность должна пройти чрезъ точки A и B, то для ней прямая AB будетъ хордою. Возставьте изъ средины C прямой AB перпендикуляръ, на которомъ, какъ вы знаете, также будетъ находиться центръ второй окружности. Откуда вы заключаете, что этотъ центръ, который долженъ лежать на двухъ прямыхъ OP и CP, непремѣнно придется въ точкѣ P пересѣченія этихъ прямыхъ. Наконецъ изъ P радіусомъ PB вы опишете окружность.

§ 83. *Провести дугу, касающуюся къ двумъ окружностямъ* (фиг. 109).

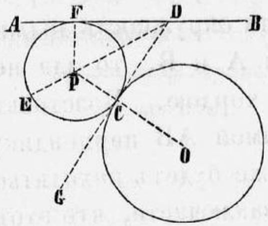
фиг. 109.



Чрезъ центръ P проведите какую-нибудь сѣкущую, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ A и C, и отложите отъ A до B часть, равную радіусу другой окружности. Соедините точки O и B прямою OB и изъ ея средины D возставьте перпендикуляръ до пересѣченія E съ сѣкущею. Наконецъ изъ точки E радіусомъ EA опишите дугу, которая должна касаться къ обѣимъ окружностямъ. Въ самомъ дѣлѣ, эта дуга касается къ окружности P (окружность P значитъ: окружность съ центромъ P), потому-что она проходитъ чрезъ одну только точку A этой окружности. Проведя прямую EO, вы получите два треугольника OED и BED, которые равны, потому-что сторона ED общая, $OD = BD$ и уг. $EDO =$ уг. EDB; слѣдовательно $EO = EB$. Прямыя EF и EA равны, потому-что $EO = EB$ и $OF = AB$; откуда вы заключаете, что EF есть радіусъ дуги AF. Такъ какъ точка F находится на окружности O и также на концѣ радіуса EF дуги, то эта дуга непремѣнно касается къ окружности въ точкѣ F.

§ 84. *Описать окружность, касающуюся къ прямой AB и къ начерченной окружности въ точкѣ C* (фиг. 110).

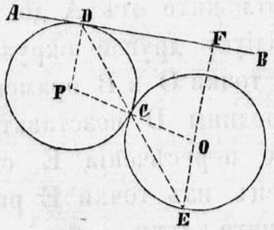
фиг. 110.



Соедините центръ O съ точкою C прямою OC и къ ней изъ точки C возставьте перпендикуляръ до пересѣченія D съ прямою AB. Вторая окружность должна касаться къ прямой AB, и къ окружности O въ точкѣ C или къ прямой DG въ точкѣ C. Раздѣлите уголъ ADG прямою DE по-поламъ; тогда центръ второй окружности будетъ находиться на прямой DE (§ 75); но онъ также долженъ лежать на продолженномъ радіусѣ OC (§ 80), слѣдовательно онъ непремѣнно придется въ точкѣ P пересѣченія прямыхъ OP и DE.

Какъ описать окружность, касающуюся къ окружности O (фиг. 111), и къ прямой AB въ точкѣ D? — Изъ точки D къ прямой AB возставьте перпендикуляръ, на которомъ, какъ извѣстно (§ 75), долженъ находиться центръ второй окружности. Изъ точки O опустите перпендикуляръ OF на прямую AB и продолжайте его до пересѣченія E съ окружностью. Соедините точки E и D прямою ED, и чрезъ точку C ея пересѣченія съ окружностью O проведите прямую OP — получится центръ P второй окружности,

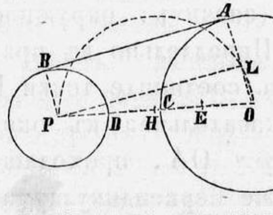
фиг. 111.



потому-что онъ находится на перпендикулярѣ DP къ касательной AB, также на продолженіи радіуса OC окружности O и наконецъ потому-что прямыя PC и PD равны. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники OCE и PCD подобны, потому-что углы OCE и PCD равны (§ 15) и углы COE и CPD равны (§ 17); такъ какъ въ треугольникѣ OCE стороны OC и OE равны, то и въ треугольникѣ PCD стороны PC и PD должны быть равны. Откуда вы заключаете, что окружность, описанная изъ точки P радіусами PC и PD, пройдетъ чрезъ точку D прямой AB и чрезъ точку C окружности O.

§ 85. *Къ двумъ окружностямъ O и P провести общую касательную* (фиг. 112).

фиг. 112.



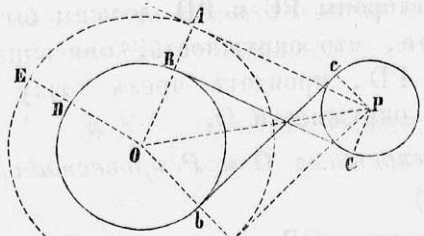
1) Соедините центры прямою OP и изъ ея средины H опишите полуокружность радіусомъ HO. Потомъ отложите радіусъ PD отъ O до E на радіусѣ OC, и отъ O до L на полуокружности хорду, равную частицѣ EC. Чрезъ O и L проведите радіусъ OA и къ нему параллельно радіусъ PB. Наконецъ соедините точки A и B прямою AB. Будетъ-ли прямая AB требуемая касательная? — Проведя прямую LP, вы получите прямой уголъ OLP, потому-что вершина L находится на полуокружности, а стороны LO и LP проведены чрезъ концы діаметра OP. Прямая $OL = EC$, $OL = OA - LA$ и $EC = OC - PD$ или $EC = OA - PB$ (потому-что $OA = OC$ и $PB = PD$). Такъ какъ прямыя OL и EC равны, то разность между прямыми OA и LA должна равняться разности между прямыми OA и PB — что возможно только въ такомъ случаѣ, когда прямыя LA и PB равны. Четыреугольникъ ABPL, въ которомъ противолежащія стороны AL и BP равны и параллельны, долженъ быть параллелограмъ; слѣдовательно также стороны AB и LP будутъ параллельны и уголъ OAB прямой, потому-что соотвѣтствующій ему уголъ OLP прямой; такъ какъ пря-

*

мая PB параллельна къ OA, то и уголъ PBA прямой. Откуда вы заключаете, что прямая AB, проведенная чрезъ концы радіусовъ перпендикулярно къ этимъ прямымъ, будетъ касательная къ окружностямъ O и P.

2) Въ окружности O (фиг. 113) проведите радіусъ OD и на его продолженіи отложите часть DE, равную радіусу окружности P. Изъ точки O радіусомъ OE опишите окружность и къ ней проведите касательную PA изъ центра P (§ 75). Точку касанія A соедините съ центромъ O прямою OA, которая пересѣчетъ окружность OD (значитъ: окружность, имѣющая радіусъ OD) въ точкѣ B. Параллельно къ прямой AO проведите радіусъ PC и наконецъ соедините точки B и C прямою BC. Прямая AP, какъ касательная къ окружности OE, перпендикулярна къ радіусу OA, проходящему чрезъ точку касанія; прямая AP также перпендикулярна къ радіусу PC, потому-что онъ параллеленъ къ прямой AO; слѣдовательно этотъ-же радіусъ равенъ прямой DE или AB; слѣдовательно четыреугольникъ ABCP, въ которомъ противоположныя стороны AB и PC равны и параллельны и углы BAP и APC прямые, есть прямоугольникъ, въ которомъ также углы ABC и BCP должны быть прямые; а потому вы заключаете, что прямая BC, проходящая чрезъ концы радіусовъ OB и PC, есть касательная къ начерченнымъ окружностямъ. Точно такимъ-же образомъ вы можете провести къ тѣмъ-же окружностямъ еще касательную *bc*.

фиг. 113.



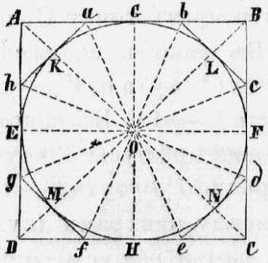
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Какое положеніе имѣетъ касательная относительно радіуса, проведеннаго чрезъ точку касанія? — 2) Какое различіе между сѣкущею и касательною? — 3) Что дѣлаетъ съ угломъ CAD, образуемымъ между касательными AC и AD, прямая AO, соединяющая общую точку этихъ касательныхъ съ центромъ O (фиг. 98)? — 4) Изъ центра O (фиг. 98) опишите окружность радіусомъ въ $^1/_2$ дюйма и изъ точки A, отстоящей отъ O на $^7/_8$ дюйма, проведите касательную къ этой окружности. — 5) Радіусомъ, равнымъ 1 дюйму, проведите окружность, касающуюся къ сторонамъ угла, равнаго 119°. — 6) Начертить треугольникъ, коего сторона AB (фиг. 99) = 2 дюймамъ, уголъ ACB = 60 и радіусъ окружности, касающейся къ сторонамъ треугольника, равенъ 1 дюйму. — 7) Начертить треугольникъ (ф. 99), коего сторона AB = $^7/_8$ дюйма, уголъ ACB = 123° и радіусъ окружности, касающейся къ сторонамъ треугольника, равенъ $^3/_4$ дюйма. — 8) Начертить треугольникъ (ф. 99), коего уг. ABC = 110°, уг. ACB = 30 и радіусъ окружности, касающейся къ сторонамъ треугольника равенъ $^3/_4$ дюйма. — 9) Въ окружности (фиг. 100), радіусъ которой равенъ $^1/_2$ дюйма, провести хорду, равную $^1/_4$ дюйма, параллельно къ хордѣ CD, равной $^7/_8$ дюйма. — 10) Въ какомъ случаѣ можно провести окружность такъ (фиг. 101), чтобы она касалась къ прямой AB въ точкѣ D и прошла чрезъ точки C и F? — 11) Радіусомъ, равнымъ $^1/_2$ дюйма, описать окружность, которая должна касаться къ прямой AB (фиг. 102) и пройти чрезъ точку C, отстоящую отъ AB на $1^1/_4$ дюйма. — 12) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда ихъ радіусы $6^3/_4$ фута и $3^7/_8$ фута, а разстояніе между центрами равно $2^7/_8$ фута? — 13) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда ихъ радіусы $3^1/_2$ фута и $4^5/_{12}$ фута, а разстояніе между центрами равно $7^{11}/_{12}$ фута? — 14) Сколько футовъ составляетъ разстояніе между центрами двухъ окружностей, касающихся изъ-внутри, когда радіусы равны $5^1/_2$ футамъ и $4^3/_8$ фута? — 15) Сколько футовъ должно содержать разстояніе между центрами двухъ пересѣкающихся окружностей коихъ радіусы равны $3^3/_4$ фута и $5^3/_4$ фута? — 16) Сколько футовъ должно содержать разстояніе между центрами двухъ окружностей, касающихся изъ-внѣ, когда радіусы равны $4^1/_2$ футамъ и $7^5/_6$ фута? — 17) Радіусомъ, равнымъ $^5/_8$ дюйма, начертит кривую линію, состоящую изъ четырехъ дугъ окружности (фиг. 106). — 18) Начертить кривую линію, состоящую изъ двухъ

дугъ окружности, такъ, чтобы она касалась къ двумъ параллельнымъ прямымъ (ф. 107), коихъ разстояніе равно $^7/_8$ вершка, въ точкахъ E и F, между которыми разстояніе равно $1^1/_2$ вершкамъ?—19) Чрезъ точку A (ф. 108) провести окружность, касающуюся въ точкѣ B къ окружности, коей радіусъ равенъ $^1/_4$ вершка, когда разстояніе между точками B и A равно $1^3/_4$ вершка. — 20) Начертить дугу, касающуюся къ двумъ окружностямъ, для которыхъ разстояніе между центрами O и P (фиг. 109) равно $1^1/_2$ вершкамъ и радіусы въ $^3/_8$ вершка равны. — 21) Описать окружность, касающуюся къ прямой AB (фиг. 111) въ точкѣ D и къ окружности OC, когда центръ O отстоитъ отъ прямой AB на $2^1/_2$ дюйма и разстояніе $FD = {}^7/_8$ дюйма. — 23) Сколько общихъ касательныхъ можно провести къ двумъ окружностямъ? — Можно-ли провести общую касательную къ двумъ пересѣкающимся окружностямъ (фиг. 104), къ двумъ окружностямъ, касающимся изъ-внѣ и касающимся изъ-внутри (фиг. 105)?

§ 86. Многоугольники, описанные около окружности.

фиг. 114.



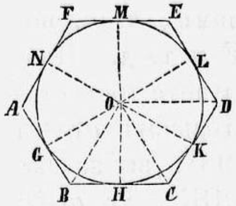
Въ окружности, коей радіусъ равенъ 1 дюйму, проведите два взаимно-перпендикулярные діаметра EF и GH (фиг. 114) и чрезъ ихъ оконечности касательныя къ окружности; этими касательными образуется квадратъ ABCD, *описанный около окружности*. Какъ объяснить, что полученный четыреугольникъ ABCD есть квадратъ? — Прямыя AB, EF, DC параллельны между собою, потому-что они перпендикулярны къ прямой GH, и прямыя AD, GH, BC параллельны, потому-что они перпендикулярны къ EF. Откуда вы заключаете, что прямыя AB, EF, DC равны и также прямыя AD, GH, BC равны (§ 39); но такъ какъ EF = GH, то непремѣнно прямыя AB, DC, AD, BC равны. Такъ какъ углы GOE, GOF, FOH, EOH прямые, то и углы BCD, ADC, BAD, ABC прямые.

Въ квадратѣ ABCD проведите діагонали AC и BD, и чрезъ ихъ точки пересѣченія K, N, L, M съ окружностью касательныя *ah*, *ed*, *bc*, *fg* — получите правильный восьмиугольникъ *abcdefgh*. Какъ объяснить, что многоугольникъ *abcdefgh* есть правильный восьмиугольникъ? — Въ квадратахъ AEOG, BGOF, CHOF, DHOE діагоналями AO, BO, CO, DO дѣлятся углы EOG, GOF, HOF, HOE по-поламъ, т. е. получатся равные углы AOE, AOG, GOB, BOF и т. д. Проведя прямыя O*a*, O*b*, O*c*, O*d* и т. д., вы получите треугольники O*ab*, O*bc*, O*cd* и т. д. Сравнивая треугольники *a*KO и *a*GO съ треугольниками ACO и ADO (фиг. 98), вы заключаете, что треуг. *a*KO = треуг. *a*GO и уг. *a*OK = уг. *a*OG; точно такимъ-же образомъ вы узнаете, что треуг. *b*GO = треуг. *b*LO, уг. *b*OG = уг. *b*OL, треуг. *c*LO = треуг. *c*FO и уг. *c*OL = уг. *c*OF. Такъ какъ углы AOG, GOL, LOF и т. д. равны, то и ихъ половины должны быть равны, т. е. углы *a*OG, GO*b*, *b*OL, *c*OL и т. д. равны. Изъ равныхъ угловъ *a*OG, GO*b*, *b*OL, *c*OL и т. д. составятся равные углы *a*O*b*, *b*O*c*, *c*O*d* и т. д. Такъ какъ уг. KOG равенъ половинѣ прямаго угла и уг. KOG = уг. *a*O*b*, то и уг. *a*O*b* = половинѣ прямаго угла и уг. *a*O*b* = 45°. Отсюда вы заключаете, что центральные углы *a*O*b*, *b*O*c*, *c*O*d* и т. д. принадлежатъ правильному восьмиугольнику. Треугольники *a*GO и *b*GO равны, потому-что сторона OG общая, уг. *a*OG = уг. *b*OG и уг. *a*GO = уг. *b*GO; слѣдовательно *a*O = *b*O; точно такимъ-же образомъ вы узнаете, что *b*O = *c*O, *c*O = *d*O и т. д. Теперь понятно, что равнобедренные треугольники *a*O*b*, *b*O*c*, *c*O*d* и т. д. равны и слѣдовательно стороны *ab*, *bc*, *cd* и т. д. равны. Въ этихъ равнобедренныхъ треугольникахъ углы *ba*O, *ab*O, *cb*O, *bc*O, *dc*O, *cd*O, *ed*O и т. д. равны; слѣдовательно и углы *abc*, *bcd*, *cde* и т. д. равны.

Чрезъ точки пересѣченія прямыхъ *a*O, *b*O, *c*O и т. д. съ окружностью проведя касательныя, вы получите правильный многоугольникъ съ 16 сторонами. Подобнымъ образомъ вы можете получить правильные многоугольники съ 32, 64 сторонами.

§ 87. При центрѣ O (фиг. 115) окружности начертите углы GOH, HOK, KOL и т. д., каждый въ 60°. Чрезъ оконечности G, H, K, L, M, N начерченныхъ радіусовъ проведя касательныя, вы получите правильный шестиугольникъ ABCDEF. Такъ-ли это? — Вамъ уже извѣстно (§ 75), что треугольники BGO и BHO равны и слѣдовательно уг. BOG = уг. BOH; также треугольники CHO и CKO, треугольники DKO и DLO равны и уг. COH = уг. COK, уг. DOK = уг. DOL. Такъ какъ углы GOH, HOK, KOL и т. д. равны, то и ихъ половины равны т. е. углы BOG, BOH, COH, COK, DOK и т. д. равны. Уголъ GOH = 60°, слѣдовательно уг. BOH = 30° и въ прямоугольномъ треугольникѣ BOH уголъ OBH = 60° (§ 22); также каждый изъ угловъ OBG, OCH, OCK, ODK и т. д. равенъ 60°. Откуда вы заключаете, что треугольники BCO, CDO, DEO и т. д. равны и равносторонны; слѣдовательно они составляютъ правильный шестиугольникъ.

Фиг. 115.



§ 88. Вычисленіе окружности круга.

Въ §§ 71, 72, 73, 74 вы уже познакомились съ правильными многоугольниками, вписанными въ окружности. Замѣчательно, что периметры этихъ многоугольниковъ всегда меньше самой окружности; такъ, напримѣръ, если сторона вписаннаго правильнаго многоугольника съ 64 сторонами равна 2 дюймамъ, то длина окружности должна быть больше 128 дюймовъ. Представьте себѣ, что въ одной и той-же окружности вписаны: правильный многоугольникъ P съ 16-ю сторонами, еще правильный многоугольникъ Q съ 32-мя сторонами и еще правильный многоугольникъ V съ 64-мя сторонами; тогда вычисленіями узнается, что периметръ P меньше периметра Q, и периметръ Q меньше периметра V; т. е. чѣмъ больше число сторонъ въ многоугольникѣ, тѣмъ больше и его периметръ. Перейдя отъ вписаннаго правильнаго шестиугольника постепенно къ правильнымъ многоугольникамъ съ 12-ю, 24-мя, 48-ю сторонами, вы замѣчаете, что периметръ каждаго вновь полученнаго многоугольника болѣе приближается къ окружности, нежели периметръ предшествовавшаго многоугольника. Продолжая эту работу тѣмъ-же самымъ порядкомъ, вы наконецъ дойдете до многоугольника, коего периметръ мало отличается отъ окружности, но съ нею не сливается; тогда, не обращая вниманія на ничтожную ошибку, вы можете принять окружность равною периметру этого многоугольника.

Периметръ какого-нибудь правильнаго многоугольника, описаннаго около окружности, всегда больше самой окружности; такъ, напримѣръ, если периметръ описаннаго правильнаго многоугольника съ 64 сторонами содержитъ 96 дюймовъ, то окружность должна быть меньше 96 дюймовъ. Представьте себѣ, что около одной и той-же окружности описаны правильные многоугольники: P съ 12-ю, Q съ 24-мя и V съ 48-ю сторонами; тогда вы замѣтите, что периметръ P больше периметра Q и периметръ Q больше периметра V, т. е. периметръ дѣлается тѣмъ меньше, чѣмъ больше число сторонъ въ многоугольникѣ. Откуда вы заключаете, что изъ описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ тотъ многоугольникъ наиболѣе приближается къ окружности, у котораго число сторонъ наибольшее. Такъ какъ около окружности возможно описать какой-угодно правильный многоугольникъ, то конечно можно дойти до такого, коего периметръ весьма мало отличается отъ окружности.

Итакъ вы узнали, что, для вычисленія длины окружности, должно около нея описать и въ ней вписать два такіе многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ, чтобы периметръ описаннаго многоугольника мало отличался отъ периметра вписаннаго многоугольника.

§ 89. Для окружности, коей радіусъ равенъ 1 дюйму, вычислены периметры вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ и найдены слѣдующія числа:

				периметръ вписаннаго		периметръ описаннаго	
для многоугольника	съ	6	сторон.	6	дюйм.	$6^{9}/_{10}$	дюйм.
—	—	12	—	$6^{1}/_{5}$	—	$6^{2}/_{5}$	—
—	—	24	—	$6^{13}/_{100}$	—	$6^{8}/_{25}$	—
—	—	48	—	$6^{7}/_{25}$	—	$6^{29}/_{100}$	—
—	—	96	—	$6^{141}/_{500}$	—	$6^{1427}/_{5000}$	—

Окружность, какъ вамъ уже извѣстно, заключается между двумя правильными шестиугольниками: вписаннымъ и описаннымъ; слѣдовательно при радіусѣ, равномъ 1 дюйму, ея длина больше 6 дюйм. и меньше $6^{9}/_{10}$ дюйм. Разность между периметрами шестиугольниковъ равна $^{9}/_{10}$ дюйма, а между периметрами двѣнадцатиугольниковъ разность равна $^{1}/_{5}$ дюйма; слѣдовательно окружность ближе подходитъ къ двѣнадцатиугольникамъ, нежели къ шестиугольникамъ. Разность $^{19}/_{100}$ дюйма между периметрами многоугольниковъ съ 24 сторонами меньше $^{1}/_{5}$ дюйма; слѣдовательно эти многоугольники ближе подходятъ къ окружности, нежели двѣнадцатиугольники. Точно также вы узнаете, что многоугольники съ 48 сторонами ближе подходятъ къ окружности, нежели многоугольники съ 24 сторонами. Наконецъ разность $^{17}/_{5000}$ дюйма между периметрами многоугольниковъ съ 96 сторонами весьма мала, а потому вы можете принять, что эти многоугольники сливаются между собою и слѣдовательно также съ окружностью. Это обстоятельство даетъ вамъ право принять, что эти периметры и вмѣстѣ съ тѣмъ и длина окружности равна $6^{14}/_{50}$ дюйма, потому-что число $6^{14}/_{50}$ весьма близко подходитъ къ числамъ $6^{141}/_{500}$ и $6^{1427}/_{5000}$.

Итакъ вы узнали, что при радіусѣ, равномъ 1 дюйму (или 1 футу или 1 сажени или 1 аршину), окружность содержитъ $6^{14}/_{50}$ или $^{314}/_{50}$ дюйма (или фута или сажени или аршина); слѣдовательно если представить себѣ, что радіусъ раздѣленъ на 50 равныхъ частей, то окружность должна содержать 314 такихъ частей. Въ такомъ случаѣ діаметръ этой окружности долженъ содержать 2 раза 50, или 100 такихъ-же частей; слѣдовательно если діаметръ равенъ 1 дюйму (или 1 футу или 1 сажени или 1 аршину) то окружность равна $\frac{314}{100}$ дюйма (или фута или сажени или аршина).

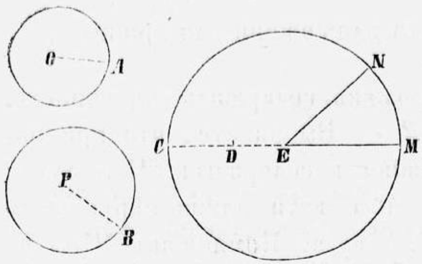
§ 90. Сколько футовъ должна содержать окружность, коей радіусъ равенъ $4^{3}/_{4}$ фута? — Вы знаете, что при радіусѣ, равномъ 1 футу, окружность содержитъ $^{314}/_{50}$ фута; слѣдовательно для радіуса въ $4^{3}/_{4}$ фута длина окружности должна равняться $4^{3}/_{4}$ раза $^{314}/_{50}$ фута. Помноживъ $^{314}/_{50}$ на $4^{3}/_{4}$, вы узнаете, что длина окружности равна $29^{83}/_{100}$ фута. Этотъ примѣръ приводитъ къ слѣдующему правилу: *чтобы вычислить длину окружности, коей радіусъ извѣстенъ, должно помножить дробь $^{314}/_{50}$ на длину радіуса.*

Сколько аршинъ содержитъ радіусъ окружности, которая заключаетъ въ себѣ $9^{1}/_{2}$ аршинъ? — Вамъ уже извѣстно, что при радіусѣ въ 1 аршинъ окружность содержитъ $^{314}/_{50}$ аршина; слѣдовательно для окружности въ $9^{1}/_{2}$ аршинъ радіусъ долженъ быть во столько разъ больше 1 аршина, во сколько разъ $9^{1}/_{2}$ аршинъ больше $^{314}/_{50}$ аршина. Какъ узнать, во сколько разъ $9^{1}/_{2}$ ар. больше $^{314}/_{50}$ ар.? — Для этого вы раздѣлите $9^{1}/_{2}$ на $^{314}/_{50}$ — получите длину радіуса, равную $1^{161}/_{314}$ аршина. Изъ этого примѣра выводится правило: *чтобы вычислить радіусъ окружности, коей длина извѣстна, вы должны раздѣлить длину окружности на дробь $^{314}/_{50}$.*

§ 91. Какая-нибудь окружность P во столько разъ болѣе ея діаметра D, во сколько разъ 314 больше 100, или $P : D = 314 : 100$. По той-же причинѣ, для окружности p, коей діаметръ равенъ d, вы имѣете $p : d = 314 : 100$. Изъ этихъ двухъ пропорцій составится пропорція $P : D = p : d$, которая показываетъ, что окружность P во столько разъ больше ея діаметра, во сколько разъ окружность p больше ея діаметра.

§ 92. Какъ описать окружность, равную суммѣ двухъ окружностей AO и BP (фиг. 116)? — На какой-нибудь пря-

Фиг. 116.



мой CM отложите часть CD, равную радіусу BP, и потомъ часть DE, равную радіусу AO. Наконецъ изъ точки E радіусомъ EC опишите окружность. Вѣрно-ли рѣшенъ этотъ вопросъ?—Предположите, что радіусъ BP = 1 футу и радіусъ AO=1 дюйму; тогда, какъ извѣстно, окружность BP $=\frac{314}{50}$ фута и окружность AO$=\frac{314}{50}$ дюйма; слѣдовательно обѣ окружности вмѣстѣ содержатъ $\frac{314}{50}$ фута + $\frac{314}{50}$ дюйма, или $\frac{4082}{50}$ дюйма. Радіусъ CE содержитъ 1 футъ + 1 дюймъ, или 13 дюймовъ; слѣдовательно окружность CE содержитъ 13 разъ $\frac{314}{50}$ дюйма, или $\frac{4082}{50}$ дюйма.

§ 93. Вычисленіе дуги окружности.

Окружность содержитъ 360 градусовъ, а потому 1 градусъ составляетъ $\frac{1}{360}$ часть окружности. Какъ вычислить длину дуги, содержащей 1 градусъ, при радіусѣ, равномъ 1 дюйму? — Эта дуга составляетъ 360-ую часть $\frac{314}{50}$ дюйма, потомучто градусъ равенъ $^1/_{360}$ части окружности, а окружность, коей радіусъ равенъ 1 дюйму, содержитъ $\frac{314}{50}$ дюйма. Какъ найти длину дуги MN (фиг. 116), когда извѣстно, что уголъ NEM $= 24^0$ и діаметръ CM $= 6^1/_4$ дюйма? — Окружность, коей радіусъ $= 3^1/_8$ дюйма (половина діаметра), содержитъ $\frac{157}{8}$ дюйма. Такъ какъ градусъ равенъ $^1/_{360}$ части окружности, то 24 градуса составляютъ $\frac{24}{360}$ частей окружности. Чтобы найти $\frac{24}{360}$ частей окружности, вы должны помножить $\frac{157}{8}$ дюйма на $\frac{24}{360}$ — получите длину дуги въ 24^0, равную $\frac{157}{120}$ или $1\frac{37}{120}$ дюйма.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

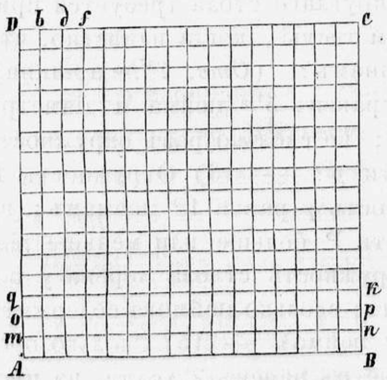
1) Какъ вы опишете правильный пятиугольникъ около окружности, коей радіусъ равенъ $^7/_8$ дюйма? — 2) Какъ вы опишете правильный десятиугольникъ, когда правильный пятиугольникъ уже описанъ? — 3) Чѣмъ отличается вписанный въ окружности правильный многоугольникъ отъ такого-же многоугольника, описаннаго около нея? — 4) Который изъ вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ: съ 5-ю, 10-ю и 20-ю сторонами ближе другихъ подходитъ къ окружности? — 5) Который изъ периметровъ описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ: съ 8-ю, 16-ю и 32-мя сторонами наименьшій? — 6) На какомъ основаніи окружность принимается за периметръ правильнаго многоугольника? — 7) Сколько вершковъ содержитъ окружность, когда ея діаметръ равенъ 1 вершку? — 8) Наружная окружность круглой башни равна 8 саженямъ, а внутренняя окружность 6 саженямъ; найти толщину стѣны башни. (*Отвѣтъ.* $2^{36}/_{157}$ *фута*). — 9) Наружная окружность чугунной трубы равна $62^4/_5$ дюйма и толщина трубы $^3/_4$ дюйма; найти радіусъ ея внутренней окружности. (*Отв.* $9^1/_4$ дюйма). — 10) Маятникъ, длиною въ 16 дюймовъ, описываетъ при своемъ качаніи дугу въ 54 градуса; найти длину этой дуги. (*Отв.* $15^9/_{125}$ дюйма). — 11) Къ краю доски круглаго стола требуется прибить тесму; сколько потребно этой тесмы, когда извѣстно, что діаметръ стола равенъ $2^1/_2$ аршинамъ? (*Отв.* $7^{17}/_{20}$ аршина). — 12) Діаметръ окружности P равенъ $5^1/_3$ дюйма и діаметръ окружности *p* равенъ $2^1/_4$ дюйма; во сколько разъ окружность P больше или меньше окружности *p*? — 13) Окружность P содержитъ 27 дюймовъ, а окружность *p* равна 12 дюймамъ; во сколько разъ діаметръ окружности P больше или меньше діаметра окружности *p*? — 14) Окружность ствола дерева у поверхности земли равна 80 дюймамъ; сколько дюймовъ содержитъ діаметръ ствола? — (*Отв.* $25^{75}/_{157}$ дюйма). — 15) Сколько оборотовъ дѣлаетъ колесо, коего діаметръ равенъ $2^1/_4$ фута, на про-

тяженіи $201\frac{6}{7}$ сажени? (*Отв.* 200 оборотовъ). — 16) Сколько сажень пройдено колесомъ, коего радіусъ равенъ $1\frac{1}{4}$ фута, когда оно сдѣлало 210 оборотовъ? (*Отв.* $235\frac{1}{2}$ сажень). — 17) Заказанъ круглый столъ на 8 человѣкъ; какой длины долженъ быть діаметръ доски этого стола, когда на каждаго человѣка полагается по $2\frac{1}{2}$ фута? (*Отв.* $6\frac{58}{157}$ фута). — 18) Длина минутной стрѣлки часовъ отъ центра циферблата до оконечности стрѣлки равна $2\frac{1}{2}$ дюймамъ; сколько сажень проходитъ оконечность этой минутной стрѣлки въ теченіе сутокъ? (*Отв.* $4\frac{17}{35}$ саж.). — 19) Дуга, длиною въ $5\frac{1}{2}$ дюймовъ, описана радіусомъ въ 9 дюймовъ; сколько градусовъ и минутъ содержитъ эта дуга? — (*Отв.* 35° 2′). — 20) Описать окружность, равную суммѣ окружностей, коихъ діаметры суть: $AB = 1\frac{1}{8}$ дюйма, $CD = \frac{3}{4}$ дюйма и EF $\frac{1}{2}$ дюйма. Вычислите длину полученной окружности. ($7\frac{183}{400}$ дюйма).

ОТДѢЛЪ VI.

Измѣреніе площадей.

фиг. 117.



§ 94. Квадратныя мѣры. Квадратнымъ аршиномъ называется квадратъ ABCD (фиг. 117), коего сторона равна 1 аршину; квадратъ, коего сторона равна 1 вершку, называется квадратнымъ вершкомъ. Сколько квадратныхъ вершковъ содержитъ квадратный аршинъ? — Раздѣлите прямую AB на 16 равныхъ частей и чрезъ полученныя точки проведите прямыя параллельно къ сторонѣ AD. Раздѣливъ прямую AD на 16 равныхъ частей, вы проведете прямыя чрезъ полученныя точки параллельно къ сторонѣ AB. Проведенными прямыми образуются квадратики, изъ которыхъ каждый есть квадратный вершокъ, потому-что ихъ стороны содержатъ по 1 вершку. Вы видите, что между сторонами AD и BC помѣстилось 16 равныхъ прямоугольниковъ, и что каждый изъ нихъ раздѣлился параллельными прямыми *mn*, *op* и т. д. на 16 равныхъ квадратиковъ; слѣдовательно квадратъ ABCD долженъ содержать 16 разъ 16 квадратиковъ, или *квадратный аршинъ содержитъ 16 разъ 16 квадратныхъ вершковъ, или 256 квадратныхъ вершковъ.*

Квадратный футъ есть квадратъ, коего сторона равна 1 футу. Что такое квадратный дюймъ? — Что такое квадратная сажень? — Какъ узнать, сколько квадратныхъ дюймовъ въ 1 квадратномъ футѣ? — Представьте себѣ, что квадратъ ABCD (фиг. 117) есть квадратный футъ, коего стороны AB и AD раздѣлены, каждая на 12 равныхъ частей, т. е. на столько частей, сколько содержится дюймовъ въ 1 футѣ. Чрезъ полученныя точки проведя прямыя параллельно къ AD и прямыя *mn*, *op* параллельно къ AB, вы получите 12 равныхъ прямоугольниковъ и въ каждомъ изъ нихъ 12 равныхъ квадратиковъ, или 12 квадратныхъ дюймовъ (потому-что стороны этихъ квадратиковъ содержатъ по 1 дюйму); слѣдовательно *квадратный футъ содержитъ 12 разъ 12 квадратныхъ дюймовъ, или 144 квадратные дюйма.*

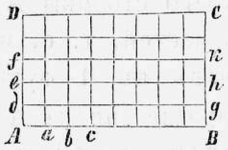
Изъ этихъ двухъ примѣровъ вы заключаете, что квадратный аршинъ содержитъ столько квадратныхъ вершковъ, сколько вершковъ въ 1 аршинѣ, умноженныхъ на число вершковъ, содержащихся въ 1 аршинѣ, и въ квадратномъ футѣ столько квадратныхъ дюймовъ, сколько дюймовъ въ 1 футѣ, умноженныхъ на число дюймовъ, находящихся въ 1 футѣ. Теперь вамъ уже понятно, что квадратная сажень содержитъ 3 раза 3, или 9 квадратныхъ аршинъ, и 7 разъ 7, или 49 квадратныхъ футовъ.

Поземельная мѣра, содержащая 2400 квадратныхъ сажень, называется *десятиною.* Къ поземельнымъ мѣрамъ относятся также *квадратная верста* и *квадратная миля.* Квадратная верста содержитъ 500 разъ 500, или 250000 квадратныхъ сажень. Въ квадратной милѣ почти 7 разъ 7, или 49 квадратныхъ верстъ.

Квадратная сажень, квадратный футъ, квадратный аршинъ и т. д. суть *квадратныя мѣры*; для отличія отъ нихъ называются мѣры, которыми измѣряется длина, *линейными.*

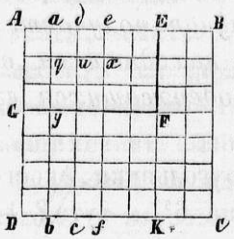
Число квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ какой-либо фигурѣ, называется ея *площадью.*

фиг. 118.



§ 95. Площадь прямоугольника. Какъ найти площадь какого-нибудь прямоугольника? Во всякомъ прямоугольникѣ одна изъ его сторонъ называется *основаніемъ*, а перпендикулярная къ ней сторона — *высотою*; такъ, напримѣръ, въ прямоугольникѣ ABCD (фиг. 118) сторона AB есть основаніе, а сторона AD высота. Предположите, что аршинъ помѣстился 8 разъ въ основаніи AB отъ A до *a*, отъ *a* до *b*, отъ *b* до *c* и т. д., и 5 разъ въ высотѣ AD отъ A до *d*, отъ *d* до *e*, отъ *e* до *f* и т. д. Проведя прямыя чрезъ точки *d*, *e*, *f* и т. д. параллельно къ основанію, и прямыя чрезъ точки *a*, *b*, *c* и т. д. параллельно къ высотѣ, вы получите въ прямоугольникѣ ABCD квадратики, равные каждый 1 квадратному аршину. Отъ проведенія прямыхъ *dg*, *eh*, *fk* и т. д. образовалось столько равныхъ прямоугольниковъ AB*gd*, *dghe*, *ehkf* и т. д., сколько аршинъ помѣстилось въ высотѣ AD, и прямыми, проведенными параллельно къ AD, получилось столько квадратиковъ въ каждомъ изъ прямоугольниковъ AB*gd*, *dghe* и т. д., сколько аршинъ улеглось въ основаніи. Откуда вы заключаете, что прямоугольникъ ABCD долженъ содержать 5 разъ 8 квадратныхъ аршинъ, или 40 квадратныхъ аршинъ; слѣдовательно, *чтобы найти площадь прямоугольника, вы должны измѣрить его основаніе и высоту одною и тою-же линейною мѣрою и потомъ перемножить полученныя числа.*

фиг. 119.



§ 96. Представьте себѣ квадратъ ABCD (фиг. 119), коего бокъ AB равенъ 1 аршину. Раздѣливъ сторону AB на 7 равныхъ частей, проведите прямыя *ab*, *dc*, *ef* и т. д. параллельно къ сторонѣ AD; тогда A*a* = $^1/_7$ аршина, A*d* = $^2/_7$ аршина, AE = $^5/_7$ аршина и т. д., и квадратный аршинъ ABCD раздѣлится прямыми *ab*, *dc*, *ef* и т. д. на 7 равныхъ прямоугольниковъ A*ab*D, *abcd*, *cdef* и т. д.; слѣдовательно прямоугольникъ A*ab*D = $^1/_7$ квадратнаго аршина, прямоугольникъ AD*cd* = $^2/_7$ квадр. аршина, AD*fe* = $^3/_7$ квадр. аршина, ADKE = $^5/_7$ квадр. аршина; т. е. прямоугольникъ, коего высота одинъ аршинъ, а основаніе равно дробной части аршина, содержитъ столько частей квадратнаго аршина, сколько частей аршина въ основаніи. Раздѣлите сторону AD на 8 равныхъ частей и проведите прямыя параллельно къ сторонѣ AB — вы раздѣлите квадратный аршинъ ABCD на 8 равныхъ частей, а потому два изъ этихъ прямоугольниковъ составляютъ $^2/_8$ квадр. ар., три прямоугольника содержатъ $^3/_8$ квадр. ар.; т. е. прямоугольникъ, коего основаніе аршинъ, а высота равна дробной части аршина, содержитъ столько частей квадратнаго аршина, сколько частей аршина въ высотѣ. Прямоугольникъ, равный $^1/_8$ квадр. аршина, раздѣленъ прямыми *aq*, *du*, *ex* и т. д. на 7 равныхъ частей; слѣдовательно прямоугольникъ *aduq* равенъ седьмой части $^1/_8$ квадр. аршина, т. е. онъ равенъ $^1/_{56}$ квадрат. аршина. Прямоугольникъ, равный $^3/_8$ квадрат. аршина, раздѣленъ прямыми *ab*, *dc*, *ef* и т. д. также на 7 равныхъ частей; слѣдовательно прямоугольникъ A*ay*G равенъ седьмой части $^3/_8$ квадрат. аршина, или онъ равенъ $^3/_{56}$ квадрат. аршина, и прямоугольникъ AEFG, состоящій изъ пяти частей, равныхъ каждая прямоугольнику A*ay*G, равенъ пяти-седьмымъ частямъ $^3/_8$ квадрат. аршина, или равенъ $^{15}/_{56}$ квадрат. аршина; слѣдовательно площадь прямоугольника AEFG, коего основаніе GF равно $^5/_7$ аршина и высота AG равна $^3/_8$ сажени, получается умноженіемъ дроби $^5/_7$ на дробь $^3/_8$. Итакъ вы видите, что *площадь прямоугольника, коего стороны содержатъ цѣлое или дробное число линейныхъ мѣръ, во всякомъ случаѣ получается перемноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, находящихся въ основаніи, на число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ высотѣ.*

§ 97. Какъ вычислить площадь прямоугольника, коего основаніе равно $5^3/_8$ сажени и высота равна $6^5/_{12}$ фута? — Желая получить эту площадь въ квадратныхъ футахъ, вы должны $5^3/_8$ сажени раздробить въ футы — получите $7 \times 5^3/_8 = 37^5/_8$ фута. Потомъ по правилу (§ 96) вы должны помножить $37^5/_8$ на $6^5/_{12}$ — получите $241^{41}/_{96}$ квадратнаго фута. Если-же вы желаете получить площадь въ квадратныхъ саженяхъ, то вы должны $6^5/_{12}$ фута превратить въ доли сажени — получите $^{11}/_{12}$ сажени. Помноживъ $5^3/_8$ на $^{11}/_{12}$, вы узнаете, что площадь прямоугольника равна $4^{89}/_{96}$ квадратной сажени. Изъ этого примѣра вы видите, что при вычисленіи площади прямоугольника должно выразить основаніе и высоту въ такихъ линейныхъ мѣрахъ, въ какихъ квадратныхъ мѣрахъ требуется получить площадь.

§ 98. Какъ узнать, сколько саженъ содержитъ основаніе прямоугольника, коего площадь содержитъ 180 квадр. саж. и высота равна $10^4/_5$ сажени? — Вамъ извѣстно, что число 180 произошло отъ умноженія $10^4/_5$ на число саженъ, содержащихся въ основаніи; слѣдовательно, чтобы узнать, сколько саженъ содержитъ основаніе, вы должны узнать, сколько разъ $10^4/_5$ содержится въ 180; для этого вы должны раздѣлить 180 на $10^4/_5$ — получите $180 : {}^{54}/_5 = 16^2/_3$ сажени.

Какъ узнать, сколько саженъ содержитъ высота прямоугольника, коего площадь равна 14 квадр. аршинамъ и основаніе равно $22^2/_5$ аршина? — Число 14 составилось умноженіемъ $22^2/_5$ на число аршинъ, содержащихся въ высотѣ; но такъ какъ 14 меньше $22^2/_5$, то $22^2/_5$ должно умножить

на дробь, чтобы получилось 14. Эту дробь вы найдете раздѣленіемъ 14 на $22^2/_5$ — получите $^5/_8$ аршина.

Эти два примѣра даютъ слѣдующее правило: чтобы узнать, сколько линейныхъ мѣръ содержитъ основаніе (или высота), вы должны раздѣлить число, которымъ выражена площадь прямоугольника, на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ (или въ основаніи).

§ 99. Представьте себѣ два прямоугольника ABCD и *abcd*, у которыхъ основанія AB и *ab* равны, а высоты AD и *ad* неравны, и предположите, что $AB = 17^1/_2$ саж., $AD = 10$ саж. и $ad = 7^1/_4$ саж. Извѣстно, что площадь ABCD равна $17^1/_2 \times 10$ и площадь *abcd* равна $17^1/_2 \times 7^1/_4$; слѣдовательно площадь ABCD во столько разъ больше площади *abcd*, во сколько $17^1/_2 \times 10$ больше $17^1/_2 \times 7^1/_4$, или во сколько разъ 10 больше $7^1/_4$, т. е. $ABCD : abcd = 10 : 7^1/_4$ или $ABCD : abcd = AD : ad$. Откуда вы заключаете, что при равныхъ основаніяхъ прямоугольниковъ ABCD и *abcd*, площадь ABCD относится къ площади *abcd* точно такъ, какъ высота AD относится къ высотѣ *ad*. Принявъ равныя стороны AB и *ab* за высоты прямоугольниковъ и неравныя стороны AD и *ad* за основанія, вы опять получите пропорцію $ABCD : abcd = AD : ad$, т. е. при равныхъ высотахъ двухъ прямоугольниковъ, площадь ABCD относится къ площади *abcd* точно такъ, какъ основаніе AD относится къ основанію *ad*.

§ 100. Площадь квадрата. Квадратъ можно принять за такой прямоугольникъ, у котораго всѣ стороны равны; слѣдовательно, чтобы вычислить площадь квадрата, достаточно измѣрить одну изъ его сторонъ. Какъ вычислить площадь квадрата ABCD (фиг. 119), коего сторона AB равна, напримѣръ, 28 саженямъ? Принявъ прямую AB за основаніе и перпендикулярную къ ней прямую AD за высоту, вы опредѣлите площадь ABCD точно такъ, какъ въ предъидущихъ §§ были вычислены площади прямоугольниковъ, т. е. вы помножите 28 на 28 — получите 784 квадратныя сажени.

§ 101. Извлеченіе квадратнаго корня.

Всякое число, происшедшее отъ умноженія двухъ равныхъ чиселъ, называется *квадратомъ;* такъ, напримѣръ, числа $36=6\times6$, $64=8\times8$, $^9/_{16}={}^3/_4\times{}^3/_4$, $^{49}/_{100}={}^7/_{10}\times{}^7/_{10}$ и т. д. суть квадраты. Вмѣсто 6×6, 8×8, $^7/_{10}\times{}^7/_{10}$ пишутъ 6^2, 8^2, $(^7/_{10})^2$ и произносятъ *6 въ квадратѣ*, *8 въ квадратѣ*, *$^7/_{10}$ въ квадратѣ*. Такъ какъ $36=6^2$, $64=8^2$, $100=10^2$ и т. д., то говорятъ: 36 есть квадратъ шести, 64 есть квадрать восьми, 100 есть квадратъ десяти и т. д.

Для первыхъ девяти чиселъ получатся слѣдующіе квадраты:

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2.

Вы видите, что квадраты чиселъ, состоящихъ изъ одной цифры, содержатъ не больше двухъ цифръ.

§ 102. Простымъ умноженіемъ вы узнаете, что $100^2=10000$, $1000^2=1000000$, $10000^2=100000000$ и т. д., т. е. квадраты чиселъ, имѣющихъ впереди единицу и оканчивающихся нулями, содержатъ единицу съ *удвоеннымъ числомъ* нулей.

Чтобы составить квадратъ числа 700, вы говорите: квадратъ семи равенъ 49 и квадратъ ста равенъ 10000; слѣдовательно квадратъ 7 сотенъ равенъ 49 десяткамъ-тысячъ или 490000.

Какъ составить квадратъ числа 8000? — Извѣстно, что квадратъ восьми равенъ 64 и квадратъ тысячи равенъ милліону; слѣдовательно квадратъ 8 тысячъ равенъ 64 милліонамъ или 64000000.

Изъ этихъ двухъ примѣровъ выводится правило: чтобы составить квадратъ числа, оканчивающагося нулями, должно составить квадратъ значущихъ цифръ и къ нему приписать справа вдвое больше нулей, нежели ихъ было въ заданномъ числѣ.

§ 103. Квадратъ какого-нибудь числа 86, состоящаго изъ двухъ цифръ, составляется умноженіемъ восьми десятковъ на 8 дес., 8 дес. на 6 ед., еще 8 дес. на 6 ед., и 6 единицъ на 6 ед.; стало быть

$$86^2=(8\text{ дес.})^2+8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}+8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}+(6\text{ ед.})^2;$$

но такъ какъ $8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}+8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}$ все равно, что 2 раза $8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}$, то

$$86^2=(8\text{ дес.})^2+2\times8\text{ дес.}\times6\text{ ед.}+(6\text{ ед.})^2;$$

т. е. квадратъ числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, содержитъ: 1) квадратъ десятковъ, 2) удвоенные десятки, помноженные на единицы, и 3) квадратъ единицъ.

По этому-же правилу вы можете составить квадратъ числа 59000, содержащаго двѣ значущія цифры и оканчивающагося нулями; именно

$$(59\text{ тыс.})^2=(5\text{ дес. тыс.})^2+2\times5\text{ дес. тыс.}\times9\text{ тыс.}+(9\text{ тыс.})^2.$$

Какъ составляется квадратъ числа 7568?

Число 7568 содержитъ 756 дес. + 8 ед.,
756 дес. — 75 сот. + 6 дес.,
— 75 сот. — 7 тыс. + 5 сот.

По правилу составленія квадрата числа о двухъ цифрахъ вы получите

$$(75\text{ сот.})^2=(7\text{ тыс.})^2+2\times7\text{ тыс.}\times5\text{ сот.}+(5\text{ сот.})^2.$$

Такъ какъ число 756 дес. состоитъ изъ 75 сот. + 6 дес., то по выведенному правилу вы получите

$(756\text{ дес.})^2=(75\text{ сот.})^2+2\times75\text{ сот.}\times6\text{ дес.}+(6\text{ дес.})^2$ или $(756\text{ дес.})^2=(7\text{ тыс.})^2+2\times7\text{ тыс.}\times5\text{ сот.}+(5\text{ сот.})^2+2\times75\text{ сот.}\times6\text{ дес.}+(6\text{ дес.})^2$. Квадратъ числа 7568, равнаго 756 дес. + 8 ед., содержитъ $(756\text{ дес.})^2+2\times756\text{ дес.}\times8\text{ ед.}+(8\text{ ед.})^2$ или

$$(7568)^2=(7\text{ тыс.})^2+2\times7\text{ тыс.}\times5\text{ сот.}+(5\text{ сот.})^2+$$
$$2\times75\text{ сот.}\times6\text{ дес.}+(6\text{ дес.})^2+$$
$$2\times756\text{ дес.}\times8\text{ ед.}+(8\text{ ед.})^2;$$

т. е. квадратъ числа, состоящаго изъ нѣсколькихъ цифръ, содержитъ: 1) квадратъ первой (впереди-стоящей цифры), 2) удвоенную первую цифру, помноженную на вторую, 3) квадратъ второй цифры, 4) удвоенное число двухъ переднихъ цифръ, помноженное на третью цифру, 5) квадратъ третьей цифры, 6) удвоенное число трехъ переднихъ цифръ, помноженное на четвертую цифру, 7) квадратъ четвертой цифры, 8) удвоенное число четырехъ переднихъ цифръ, помноженное на 5-ую цифру, 9) квадратъ 5-ой цифры и т. д.

По этому-же правилу легко составить квадратъ такого числа 86005, въ которомъ пропущено нѣсколько разрядовъ, именно

$$(86005)^2=(8\text{ дес. тыс.})^2+2\times8\text{ дес. тыс.}\times6\text{ тыс.}+(6\text{ тыс.})^2+$$
$$2\times8600\text{ дес.}\times5\text{ ед.}+(5\text{ ед.})^2.$$

§ 104. Всякое число относительно своего квадрата называется *квадратнымъ корнемъ*. Дѣйствіе, посредствомъ котораго вычисляется корень по заданному квадрату, называется *извлеченіемъ квадратнаго корня*. Для означенія этого дѣйствія употребляется знакъ $\sqrt{}$, подъ которымъ пишется заданный квадратъ; такъ, напримѣръ, $\sqrt{7464}$ значитъ: изъ числа 7464 должно извлечь квадратный корень, или должно узнать, какія два равныя числа требуется перемножить, чтобы отъ этого составилось число 7464.

Зная квадраты первыхъ десяти чиселъ, вы легко узнаете, что $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$ и т. д. $\sqrt{100}=10$; также по предъидущему вы узнаете, что $\sqrt{10000}=100$, $\sqrt{1000000}=1000$ и т. д.

Какъ найти квадратный корень числа 6400? Число 6400 равно 64 сотнямъ, сотня равна 10^2 и $64=8^2$; слѣдовательно $\sqrt{6400}=80$.

Какъ найти квадратный корень числа 360000? Число 360000 равно 36 десяткамъ-тысячъ, $\sqrt{10000}=100$ и $\sqrt{36}=6$; слѣдовательно $\sqrt{360000}=600$.

Какъ найти квадратный корень числа 49000000? Вы знаете, что $\sqrt{1000000}=1000$ и $\sqrt{49}=7$; слѣдовательно $\sqrt{49000000}=7000$.

Изъ этихъ примѣровъ можно вывести правило: если впереди-стоящія цифры числа, оканчивающагося четнымъ числомъ нулей, составляютъ какое-нибудь квадратное число, то въ корнѣ получится столько десятковъ, или сотенъ, или тысячъ и т. д., сколько единицъ получается въ корнѣ изъ значущихъ цифръ заданнаго числа.

§ 105. Какъ извлечь квадратный корень изъ числа 7396? Число 7396 находится между $100=10^2$ и $10000=100^2$, а потому квадратный корень числа долженъ быть меньше 100 и больше 10, или онъ долженъ содержать двѣ цифры, т. е. десятки и единицы; слѣдовательно заданное число 7396 содержитъ: 1) квадратъ десятковъ, 2) удвоенные десятки, помноженные на единицы, и 3) квадратъ единицъ. Такъ какъ квадратъ одного десятка равенъ сотнѣ, то десятки корня вы должны искать въ 73 сотняхъ числа 7396. Вы знаете, что отъ 73 сотенъ получится въ корнѣ столько десятковъ, сколько единицъ получится въ корнѣ отъ числа 73. Число 73 заключается между квадратами $64=8^2$ и $81=9^2$; откуда вы заключаете, что въ 73 содержится 8^2, $\sqrt{73}=8$ и $\sqrt{73}$ сот. $=8$ дес. Поставивъ знакъ равенства вправо отъ $\sqrt{7396}$, напишите цифру 8 вправо отъ этого знака. Изъ 73 сот. вычитайте $(8\text{ дес.})^2=64$ сот. — останется 996. Этотъ остатокъ долженъ содержать: 1) два раза 8 дес., помноженныхъ на единицы, и 2) квадратъ единицъ. Два раза 8 дес., помноженныхъ на единицы, даютъ десятки; слѣдовательно число 2×8 дес. $\times$ ед. должно содержаться въ 99 десяткахъ остатка 996. Зная, что 2×8 дес. $\times$ ед. равны 99 дес., вы получите единицы корня раздѣленіемъ 99 дес. на 2×8 дес. или раздѣленіемъ 99 на 16. Цифру 6, полученную отъ раздѣленія 99 на 16, напишите вправо отъ цифры 8. Отъ 996 отнимите 2×8 дес. $\times 6$ ед., или 96 дес. — останется 36. Остатокъ 36 долженъ содержать квадратъ 6 ед.; въ самомъ дѣлѣ, $6^2=36$.

$$\begin{array}{l}\sqrt{7396}\,|=86\\ \underline{\;64=(8\text{ дес.})^2\;}\\ \;\;996\,|\,16\\ \;\;\underline{96=2\times 8\text{ дес.}\times 6\text{ ед.}}\\ \;\;\;36\\ \;\;\;\underline{36=(6\text{ ед.})^2}\end{array}$$

Какъ извлечь квадратный корень изъ 7064964?

Заданное число заключается между 1 мил. $=(1000)^2$ и 100 мил. $=(10000)^2$; слѣдовательно неизвѣстный корень долженъ быть больше 1000 и меньше 10000, или онъ долженъ содержать четыре цифры: тысячи, сотни, десятки и единицы. Понятно, что тысячи корня вы должны искать въ 7 мил. заданнаго числа. Отъ 7 мил. получится въ корнѣ столько тысячъ, сколько единицъ получится въ корнѣ отъ 7 ед. Число 7 заключается между квадратами $4=2^2$ и $9=3^2$; слѣдовательно $\sqrt{7}=2$ и $\sqrt{7}$ мил. $=2$ тыс. Пишите цифру 2 вправо отъ знака равенства и вычитайте 4 мил. $=(2\text{ тыс.})^2$ изъ заданнаго числа; къ полученному остатку 3 припишите двѣ слѣдующія цифры 06. Въ остаткѣ 306

$$\begin{array}{l}\sqrt{7064964}=2658\\ \underline{\;4=(2\text{ тыс.})^2\;}\\ \;306\,|\,4\\ \underline{\;24=2\times 2\text{ тыс.}\times 6\text{ сот.}}\\ \;\;66\\ \;\;\underline{36=(6\text{ сот.})^2}\\ \;\;3049\,|\,52\\ \;\;\underline{260=2\times 26\text{ сот.}\times 5\text{ дес.}}\\ \;\;\;449\\ \;\;\;\underline{\;25=(5\text{ дес.})^2}\\ \;\;\;42464\,|\,530\\ \;\;\;\underline{4240=2\times 265\text{ дес.}\times 8\text{ ед.}}\\ \;\;\;\;\;64\\ \;\;\;\;\;\underline{64=8^2}\end{array}$$

должно содержаться 2 × 2 тыс. × сот. + (сот.)^2. Такъ какъ отъ умноженія тысячи на сотню получается сотня-тысячъ, то число 2 × 2 тыс. × сот. должно содержаться въ 30 сотняхъ тысячъ; слѣдовательно для полученія сотенъ корня вы должны раздѣлить 30 сот. тыс. на 2×2 тыс., или 30 сот. на 4 ед. — получите 6 сот. Пишите цифру 6 вправо отъ цифры 2 и помножьте 2 × 2 тыс. на 6 сот. — получите 24 сот. тыс. Вычитайте 24 сот. тыс. изъ 306 дес. тыс. — останется 66 дес. тыс. Изъ послѣдняго остатка вы должны вычесть 36 дес. тыс. = (6 сот.)^2 — останется число 30, къ которому вы припишете справа двѣ слѣдующія цифры 4 и 9 заданнаго числа. Остатокъ 3049 сот. долженъ содержать 2×26 сот. × дес. + (дес.)^2. Такъ какъ отъ умноженія сотни на десятокъ получается тысяча, то число 2×26 сот.×дес. должно находиться въ 304 тысячахъ остатка; слѣдовательно для полученія десятковъ корня вы должны раздѣлить 304 тыс. на 2 × 26 сот., или 304 дес. на 2 × 26 ед. Отъ этого дѣленія вы получите 5 дес. Пишите цифру 5 вправо отъ 6 и вычитайте 260 тыс., т. е. 2×26 сот. × 5 дес., изъ 3049 сот. — останется 449 сот. Изъ этого остатка вы должны вычесть (5 дес.)^2 = 25 сот. — останется 424 сот. Къ этому остатку припишите справа двѣ слѣдующія цифры 6 и 4 заданнаго числа. Число 42464 должно содержать 2×265 дес. × ед. + (ед.)^2 и число 2 × 265 дес. × ед. должно находиться въ 4246 дес. остатка; слѣдовательно для полученія единицъ корня вы должны раздѣлить 4246 на 2×265; отъ этого дѣленія вы получите 8 ед. Изъ числа 42464 вы должны вычесть 2 × 265 дес. × 8 ед. = 4240 дес. — останется 64. Наконецъ остатокъ 64 долженъ содержать (8 ед.)^2.

Основываясь на изложенныхъ объясненіяхъ извлеченія квадратнаго корня, извлеките корень квадратный изъ числа 1649091627 по сокращенному способу. Заданное число, содержащее 1649 милліоновъ, находится между квадратами 100 мил. = $(10000)^2$ и 10000 мил. = $(100000)^2$; слѣдовательно корень квадратный заданнаго числа долженъ быть больше 10000 и меньше 100000, т. е. онъ долженъ содержать пять разрядовъ: десятки-тысячъ, тысячи, сотни, десятки и единицы. Вы знаете, что $(10000)^2$ = 100 мил.; слѣдовательно десятки-тысячъ корня вы должны искать въ 16 сотняхъ-милліоновъ. Такъ какъ $\sqrt{16} = 4$, то первая цифра корня будетъ 4. Изъ 16 сот. мил. вычитайте $4^2=16$ — ничего не останется. Снесите двѣ слѣдующія цифры 4 и 9 и удвойте цифру 4 корня — получите 8. Въ остаткѣ 49 отдѣлите послѣднюю цифру 9 и раздѣлите переднюю цифру остатка на удвоенный корень; это дѣленіе невозможно, а потому вы пишете нуль въ корнѣ. Къ остатку 49 припишите двѣ слѣдующія цифры 0 и 9 и въ числѣ 4909 отдѣлите послѣднюю цифру 9. Удвойте полученный корень 40 и узнайте, сколько разъ 80 содержится въ 490 — получите 6. Пишите цифру 6 въ корнѣ и помножьте 80 па 6 — получите 480. Вычитайте 480 изъ переднихъ цифръ остатка 4909 — останется 109. Изъ этого остатка вы должны вычесть $6^2=36$ — останется 73. Къ остатку 73 припишите справа двѣ слѣдующія цифры 1 и 6 и въ числѣ 7316 отдѣлите послѣднюю цифру 6. Удвойте полученный корень 406 и раздѣлите 731 на 812. Такъ какъ 812 не содержится въ 731, то въ корнѣ вы ставите нуль и къ остатку 7316 припишете двѣ слѣдующія цифры 2 и 7. Въ остаткѣ 731627 отдѣлите послѣднюю цифру 7, удвойте корень 4060 и узнайте, сколько разъ 8120 содержится въ 73162; отъ раздѣленія 73162 на 8120 получится 9. Пишите цифру 9 въ корнѣ, помножьте 8120 на 9 и вычитайте 73080 изъ переднихъ цифръ остатка 731627 — получите 827. Изъ этого остатка вы должны вычесть $81 = 9^2$ — останется 746.

$$\begin{array}{l} \sqrt{1649091627}\,|=40609 \\ \underline{16 = 4^2} \\ \quad 4909 : 80 \\ \quad \underline{480 = 2\times40\times6} \\ \quad\; 109 \\ \quad\;\; \underline{36 = 6^2} \\ \quad\;\; 731627 : 8120 \\ \quad\;\; \underline{73080 = 2\times4060\times9} \\ \qquad\quad 827 \\ \qquad\quad\; \underline{81 =} \\ \qquad\quad 746 \end{array}$$

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ вы видите, что, по извлеченіи квадратнаго корня изъ цѣлаго числа, можетъ получиться остатокъ, равный нулю, или какой-нибудь другой остатокъ. Остатокъ нуль показываетъ, что заданное число есть *полный* квадратъ, что оно дѣйствительно составилось умноженіемъ двухъ равныхъ чиселъ. Если-же послѣдній остатокъ не равенъ нулю, то заданное число не есть произведеніе двухъ равныхъ множителей.

§ **106**. Чтобы найти квадратъ какой-нибудь дроби $\frac{17}{24}$, вы должны помножить $\frac{17}{24}$ на $\frac{17}{24}$ — получите $\left(\frac{17}{24}\right)^2=\frac{289}{576}$. На этомъ основанiи найдется квадратный корень какой-нибудь дроби $\frac{729}{2401}$ извлеченiемъ квадратныхъ корней изъ числителя и знаменателя — получите $\sqrt{729}=27$ и $\sqrt{2401}=49$; слѣдовательно $\sqrt{\frac{729}{2401}}=\frac{27}{49}$. Для дроби, коей знаменатель есть неполный квадратъ, вы можете, для сокращенiя дѣйствiя, превратить знаменатель въ полный квадратъ; такъ, напримѣръ, чтобы извлечь корень квадратный изъ дроби $\frac{8}{13}$, помножьте сперва числитель и знаменатель на знаменатель 13 (отъ этого умноженiя величина дроби не перемѣнится) — получите $\frac{104}{169}$; $\sqrt{104}=10$ и $\sqrt{169}=13$; слѣдовательно $\sqrt{\frac{8}{13}}=\frac{10}{13}$. Подобнымъ образомъ вы получите $\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{84}{144}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, $\sqrt{\frac{16}{19}}=\sqrt{\frac{304}{361}}=\frac{17}{19}$ и т. д.

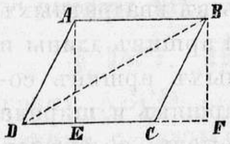
Изъ неполнаго квадрата можно извлечь квадратный корень такъ, чтобы получилось цѣлое число съ дробью. Для примѣра извлеките квадратный корень изъ числа 7, чтобы въ корнѣ получились 15-ыя доли. Сперва найдите квадратъ числа 15 — получите 225; потомъ превратите 7 ед. въ 225-ыя доли — получите $7=\frac{7\times225}{225}=\frac{1575}{225}$; $\sqrt{1575}=39$ и $\sqrt{225}=15$; слѣдовательно $\sqrt{7}=\frac{39}{15}=\frac{13}{5}=2^3/_5$. Чтобы найти квадратный корень числа 13 въ 32-ыхъ доляхъ, вы должны вычислить 32^2 — получите 1024; потомъ вы выразите 13 въ 1024-ыхъ доляхъ — получите $13=\frac{13\times1024}{1024}=\frac{13312}{1024}$; $\sqrt{13312}=115$ и $\sqrt{1024}=32$; слѣдовательно $\sqrt{13}=\frac{115}{32}=3\frac{19}{32}$.

Чтобы извлечь квадратный корень изъ смѣшаннаго числа $28^4/_7$, превратите это число въ неправильную дробь — получите $\frac{200}{7}$; потомъ помножьте числитель и знаменатель этой дроби на знаменатель 7 — получите $\frac{1400}{49}$; $\sqrt{1400}=37$ и $\sqrt{49}=7$; слѣдовательно $\sqrt{28^4/_7}=\frac{37}{7}=5^2/_7$.

§ 107. Какъ вычислить сторону квадрата, коего площадь содержитъ, напримѣръ, 5783 квадр. сажени?

Вы знаете, что площадь (§ 100) квадрата получается умноженiемъ двухъ равныхъ чиселъ; слѣдовательно, на оборотъ, чтобы по извѣстной площади квадрата вычислить одну изъ его сторонъ, вы должны узнать, какiя два равныя числа требуется перемножить, чтобы составилась площадь 5783 квад. саж., или вы должны извлечь квадратный корень изъ числа 5783—получите почти 76 сажень.

Фиг. 120.



§ 108. Площадь параллелограма. Въ параллелограмѣ ABCD (фиг. 120) опустите перпендикуляры AE и BF изъ вершинъ A и B на противоположную сторону DC; прямыя AE и BF будутъ также перпендикулярны къ сторонѣ AB (§ 18). Принявъ сторону DC (или равную ей сторону AB) за основанiе, вы назовете перпендикуляръ AE (или равный ему перпендикуляръ BF) высотою параллелограма. Отъ проведенiя этихъ перпендикуляровъ образуются два треугольника ADE и BCF, въ которыхъ стороны AD и BC равны (почему?), стороны AE и BF равны (почему?) и наконецъ углы DAE и CBF равны (§ 19); слѣдовательно треугольники равны (§ 25). Представьте себѣ, что отъ параллелограма ABCD отнятъ треугольникъ ADE и съ другой стороны прибавленъ къ параллелограму треугольникъ BCF; этимъ дѣйствiемъ параллелограмъ ABCD превратится въ прямоугольникъ ABFE, у котораго основанiе равно основанiю параллелограма и высота равна высотѣ AE. Такъ какъ вы отняли отъ параллелограма и прибавили къ нему по-ровну, то образовавшiйся прямоугольникъ по своей величинѣ равенъ параллелограму ABCD. Откуда вы заключаете, что площадь параллелограма ABCD должна быть вычислена точно такъ, какъ вычисляется площадь равномѣрнаго ему прямоугольника ABFE, т. е. площадь параллелограма получается умноженiемъ линейныхъ мѣръ, заключающихся въ его основаніи, на число тѣхъ-же мѣръ, заключающихся въ его высотѣ.

Два параллелограма равномѣрны, когда у нихъ основанія равны и также высоты равны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

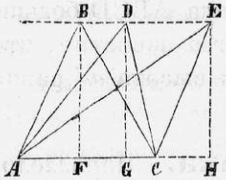
1) Сколько квадратныхъ аршинъ и квадратныхъ футовъ въ квадратной сажени?—2) Сколько квадратныхъ вершковъ въ квадратномъ аршинѣ и сколько квадратныхъ дюймовъ въ квадратномъ футѣ? — 3) Что такое десятина, квадратная верста и квадратная миля? — 4) Найти площадь прямоугольнаго двора, коего длина содержитъ 25 и ширина 13 сажень. — 5) Выразить въ квадратныхъ саженяхъ площадь двери, имѣющей 1 сажень вышины и $\frac{11}{16}$ сажени ширины. — 6) Выразить въ квадратныхъ аршинахъ площадь листа бумаги, имѣющаго 1 аршинъ длины и $\frac{13}{32}$ аршина ширины. — 7) Сколько квадратныхъ аршинъ содержитъ потолокъ комнаты, коей длина 8 аршинъ и ширина $7\frac{3}{4}$ аршина? — 8) Сколько квадратныхъ сажень содержитъ прямоугольное поле, длиною въ $115\frac{3}{4}$ сажени и шириною въ $67\frac{5}{8}$ сажени? — 9) Найти площадь прямоугольной доски, коей длина $3\frac{3}{4}$ аршина и ширина $7\frac{1}{4}$ вершковъ. — 10) Для сада отдѣлено прямоугольное мѣсто въ $1130\frac{1}{12}$ квадратной сажени и шириною въ $23\frac{2}{3}$ сажени; найти длину сада. — 11) Крестьянину отдѣлено прямоугольное поле въ 7 десятинъ и длиною въ $97\frac{1}{2}$ сажень; найти ширину этого поля. — 12) Сколько квадратныхъ сажень содержитъ стѣна, длиною въ 3 сажени $1\frac{1}{2}$ аршина и шириною въ 3 сажени $1\frac{1}{2}$ аршина? — 13) Улица, длиною въ 1 версту 255 сажень, содержитъ $4152\frac{1}{2}$ квадратныя сажени; найти ея ширину. — 14) Квадратный лугъ содержитъ 12 десятинъ 225 квадратныхъ сажень; сколько сажень въ его длинѣ? — 15) Параллелограмъ ABCD (фиг. 120) равномѣренъ прямоугольнику ABFE, основаніе прямоугольника равно 23 саженямъ и его площадь равна $402\frac{1}{2}$ квадратнымъ саженямъ; найти основаніе, высоту и площадь параллелограма ABCD. — 16) Начертите два прямоугольника ABCD и *abcd* съ равными высотами и предположите, что площадь ABCD равна 700 квадр. саж., площадь *abcd* равна 500 квадр. саж. и основаніе AB равно 20 саж.; сколько сажень въ основаніи *ab*? — 17) Начертите два параллелограма ABCD и *abcd* съ равными высотами и предположите, что параллелограмъ ABCD = 240 квадр. саж., основаніе AB = 25 саж. и основаніе *ab* = 20 саж.; сколько квадратныхъ сажень въ параллелограмѣ *abcd*? — 18) Въ двухъ параллелограмахъ ABCD и *abcd* высоты равны, но основаніе AB въ 4 раза больше основанія *ab*; во сколько разъ площадь ABCD больше или меньше площади *abcd*? — 19) Въ двухъ прямоугольникахъ ABCD и *abcd* основанія равны, но высота параллелограма ABCD составляетъ $\frac{1}{5}$ высоты параллелограма *abcd*; во сколько разъ площадь *abcd* больше или меньше площади ABCD? — 20) Во сколько разъ площадь прямоугольника ABCD больше или меньше площади прямоугольника *abcd*, когда извѣстно, что основаніе AB составляетъ $\frac{3}{5}$ основанія *ab*, и высота *ad* равна $\frac{4}{7}$ высоты AD.

§ 109. Площадь треугольника. Параллелограмъ ABCD (фиг. 120) раздѣлится діагональю BD на два равные треугольника (§ 48). Въ треугольникѣ BDC перпендикуляръ BF, опущенный изъ вершины B на противоположную ей сторону, есть высота, а сторона DC основаніе треугольника. Такъ какъ треугольникъ BDC составляетъ половину параллелограма ABCD, то его площадь найдется умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ основаніи DC, на число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ высотѣ BF, и раздѣленіемъ полученнаго числа на 2; такъ напримѣръ предположите, что основаніе DC равно 17 саж. и высота BF равна 8 саж.; тогда для площади параллелограма ABCD вы помножите 17 на 8 (получите 136 квад. саж.), а для площади треугольника BCD вы должны взять половину 136 квад. саж. — получите 68 квад. саж.

Предположите, что треугольникъ BCD содержитъ 720 квад. саж. и основаніе DC равно 48 саж.; сколько сажень въ высотѣ этого треугольника? — Удвоивъ число, 720 квад. саж., вы узнаете, что параллелограмъ, имѣющій общее основаніе и общую высоту съ треугольникомъ BCD, содержить 1440 квад. саж. Извѣстно, что число 1440 квад. саж., произошло отъ умноженія числа, 48 саж., на число сажень, содержащихся въ высотѣ BF; слѣдовательно число 48 содержится въ числѣ 1440 столько разъ, сколько сажень содержится въ высотѣ BF. Чтобы узнать, сколько разъ 48 содержится въ 1440, вы должны раздѣлить 1440 на 48 — получите BF = 30 саж.

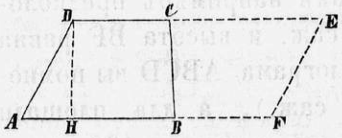
Треугольники равномѣрны, когда у нихъ основанія равны и также высоты равны. Въ треугольникахъ ABC, ADC, AEC (фиг. 121), имѣющихъ общее основаніе, только тогда высоты могутъ быть равны, когда вершины B, D, E треугольниковъ находятся на прямой BE, параллельной къ основанію, потому-что при параллельности прямыхъ BE и AC, перпендикуляры BF, DG, EH должны быть равны (§ 39). Откуда вы заключаете, что треугольники равномѣрны, когда у нихъ общее основаніе, и вершины, противолежащія основанію, находятся на прямой, параллельной къ основанію.

Фиг. 121.



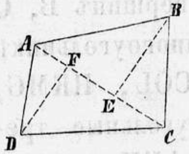
§ 110. Площадь трапеціи. Въ трапеціи (фиг. 122) прямая DH, проведенная перпендикулярно къ параллельнымъ сторонамъ DC и AB, называется высотою. Продолживъ стороны DC и AB, отложите часть CE, равную сторонѣ AB, и часть BF, равную сторонѣ DC, и наконецъ соедините точки E и F прямою EF. Прямыя DE и AF равны, потому-что ихъ части AB и CE, BF и DC равны. По параллельности и равенству прямыхъ AF и DE вы заключаете, что четыреугольникъ ADEF есть параллелограмъ, въ которомъ слѣдовательно стороны AD и EF равны и параллельны. Въ трапеціяхъ ABCD и BCEF стороны равны, именно AB = CE, DC = BF, AD = EF, сторона BC общая, и углы равны, именно ABC = BCE и BCD = CBF (какъ внутренно-противоположные, § 17), ADC = BFE и BAD = CEF (какъ противолежащіе углы параллелограма, § 48); слѣдовательно трапеціи равны и каждая изъ нихъ есть половина параллелограма ADEF. Такъ какъ площадь этого параллелограма получается умноженіемъ линейныхъ мѣръ, содержащихся въ основаніи AF, на число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ высотѣ DH, то для площади трапеціи ABCD, равной половинѣ параллелограма ADEF, вы должны помножить число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ прямой AF или въ прямыхъ AB и DC, на число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ высотѣ DH, и наконецъ полученное число раздѣлить на 2. Для примѣра предположите, что прямыя AB = 26 саж., DC = 21 саж. и DH = 13 саж. По выведенному правилу вы должны сложить 26 и 21 (получите 47), потомъ вы помножите 47 на 13 (получите 611) и наконецъ вы раздѣлите 611 на 2 — получите площадь ABCD = $305^1/_2$ квадр. саж.

Фиг. 122.



§ 111. Площадь четыреугольника. Въ четыреугольникѣ ABCD (фиг. 123) проведя діагональ AC, опустите на нее перпендикуляры BE и DF изъ вершинъ B и D. Такъ какъ четыреугольникъ ABCD состоитъ изъ двухъ треугольниковъ ABC и ADC, то для полученія его площади вы должны вычислить площади этихъ треугольниковъ и потомъ сложить найденныя числа. Для примѣра предположите, что AC = 25 саж., BE = 17 саж. и DF=15 саж. Для полученія площади ABC вы помножите 25 на 17 (получите 425) и потомъ раздѣлите 425 на 2 (получите $212^1/_2$ квад. саж.). Чтобы получить площадь ADC, вы раздѣлите $375=25\times15$ на 2 — получите $187^1/_2$ квад. саж.; слѣдовательно площадь ABCD равна $212^1/_2 + 187^1/_2$, или равна 400 квад. саж.

Фиг. 123.

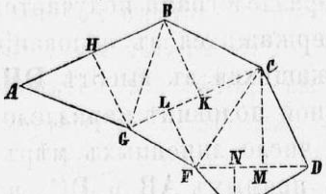


§ 112. Площадь неправильнаго многоугольника вычисляется слѣдующими способами:

1) Въ многоугольникѣ ABCDEFG (фиг. 124) проведя

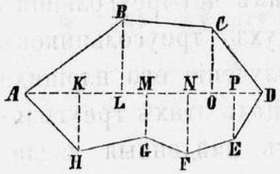
діагонали BG, CG, CF, DF, вы раздѣлите его на треугольники ABG, BCG, CFG, CDF и DEF. Понятно, что для полученія площади ABCDEFG вы должны вычислить площади образовавшихся треугольниковъ. Для этихъ вычисленій вы опускаете перпендикуляры: GH на AB, BK и FL на CG, CM и EN на DF и узнаете, сколько линейныхъ мѣръ содержитъ каждая изъ этихъ прямыхъ; такъ, напримѣръ, предположите, что AB = 35 саж., GH = 24 саж., CG = 38 саж., BK = 26 саж., FL = 19 саж., FD = 27 саж., CM = 35 саж. и EN = 23 саж. Производя вычисленія, вы получите ABG = 420 кв. саж., BCG = 494 кв. саж., CFG = 361 кв. саж., CFD = $472^1/_2$ кв. саж., DEF = $310^1/_2$ кв. саж. и наконецъ площадь ABCDEFG = 2058 кв. саж.

фиг. 124.



2) Въ многоугольникѣ ABCDEFGH (фиг. 125) проведите діагональ AD и на нее опустите перпендикуляры BL, CO, HK, GM, FN, EP изъ вершинъ B, C H, G, F, E; тогда въ многоугольникѣ образуются трапеціи BCOL, HKMG, FGMN, EFNP и прямоугольные треугольники ABL, CDO, AKH и DEP. Чтобы получить, площадь этого многоугольника, вы должны узнать, сколько линейныхъ мѣръ содержатъ прямыя AL, BL, LO, CO, DO, AK, KH, KM, MG, MN, NF, NP, PE, PD. Предположите, что AL = 15 саж., BL = 17 саж., LO = 23 саж., CO = 13 саж., DO = 11 саж. и т. д. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABL катетъ BL принимается за высоту и катетъ AL за основаніе, потому-что стороны BL и AL взаимно-перпендикулярны; площадь ABL равна $\frac{17\times15}{2}$, или равна $127^1/_2$ кв. саж. Въ трапеціи BCOL сторона OL принимается за высоту, потому-что она

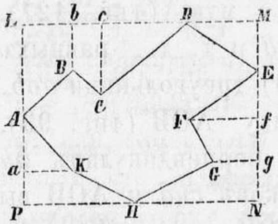
фиг. 125.



перпендикулярна къ параллельнымъ сторонамъ BL и CO. Для полученія площади этой трапеціи вы сложите 17 и 13 потомъ помножите полученную сумму 30 на 23 (получится 690) и наконецъ вы раздѣлите 690 на 2 — получите 345 квадр. саж. Вычисляя такимъ-же образомъ площади прочихъ треугольниковъ и трапецій, вы должны сложить найденныя площади; полученная сумма опредѣлитъ площадь заданнаго многоугольника.

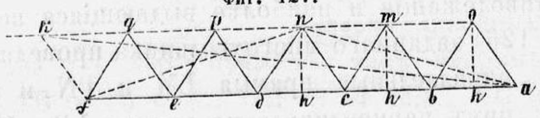
3) Чрезъ противолежащія и наиболѣе выдающіяся вершины D и H (фиг. 126) заданнаго многоугольника проведите параллельныя прямыя LM и PN и къ нимъ перпендикулярно прямыя LP и MN чрезъ наиболѣе выдающіяся вершины A и E; проведенными прямыми образуется прямоугольникъ LMNP. Потомъ опустите перпендикуляры изъ вершинъ B, C, F, G, K на стороны прямоугольника LMNP. Чтобы примѣромъ объяснить подобнаго рода рѣшеніе, предположите, что PN = 118 саж., HN = 57 саж., NM = 96 саж., Ng = 11 саж., fg = 25 саж., Ef = 33 саж., Lb = 25 саж., bc = 37 саж., cD = 33 саж., LA = 52 саж., Aa = 25 саж. Вычисленіями вы узнаете, что прямая PH = 118 — 57 = 61 саж., Ng + gf + fE = 69 саж., ME = 96 — 69 = 27 саж., Lb + bc + cD = 95 саж., DM = 118 — 95 = 23 саж., LA + Aa = 77 саж., aP = 96 — 77 = 19 саж. Далѣе предположите, что Bb = 23 саж., Cc = 29 саж., Ff = 25 саж., Gg = 10 саж., aK = 24 саж. Сперва вы найдете площадь прямоугольника LMNP, равную 11328 кв. саж.; потомъ вы вычислите площади: ABbL = $937^1/_2$ кв. саж., BCcb = 962 кв. саж., CDc = $478^1/_2$ кв. саж., DME = $310^1/_2$ кв. саж., EFf = $412^1/_2$ кв. саж., FGgf = $437^1/_2$ кв. саж., HGgN = $368^1/_2$ кв. саж., PHKa = $807^1/_2$ кв. саж., AKa = 300 кв. саж. Треугольники и трапеціи, расположенные между сторонами прямоугольника LMNP и сторонами даннаго многоугольника, составляютъ $5014^1/_2$ кв. саж. Вычтя $5014^1/_2$ кв. саж. изъ

фиг. 126.



11328 кв. саж. (т. е. изъ площади LMNP), вы получите площадь ABCDEFGHK, равную 6313$^1/_2$ кв. саж.

§ 113. Площадь правильнаго многоугольника.



фиг. 127.

Въ окружности (фиг. 93) впишите какой-нибудь правильный многоугольникъ, хоть съ 5-ю сторонами, и соедините центръ O съ вершинами A, B, C и т. д. радіусам OA, OB, OC и т. д. — получите равные треугольники AOB, BOC, COD и т. д. Проведя какую-нибудь прямую (фиг. 127), отложите на ней пять частей ab, bc, cd и т. д., равныхъ сторонѣ AB, и на нихъ постройте (§ 23) треугольники aob, bmc, cnd и т. д., равные треугольнику AOB (фиг. 93). Проведите прямыя an и nf и опустите перпендикуляръ nh на сторону af. По равенству треугольниковъ cnd и AOB вы заключаете, что и перпендикуляры nh и OH равны. Понятно, что сумма площадей aob, bmc, cnd и т. д. равна площади многоугольника ABCDE; но сумма тѣхъ-же площадей равна также площади треугольника anf, у котораго основаніе af равна периметру AB + BC + CD + DE + AE заданнаго многоугольника и высота nh равна перпендикуляру OH. Для объясненія этого обстоятельства проведите прямую fk параллельно къ eq, и прямую ok чрезъ вершины o, m, n, p и т. д. Линія ok прямая, потому-что она проведена чрезъ оконечныя точки o, m, n и т. д. равныхъ перпендикуляровъ oh, mh, nh и т. д. По равенству этихъ-же перпендикуляровъ вы заключаете, что прямыя ok и af параллельны. Въ равнобедренныхъ треугольникахъ aob, bmc, cnd, obm, mcn и т. д. углы oab, oba, bom, bmo, mbc, bcm и т. д. равны. По равенству этихъ угловъ понятно, что прямыя ao, bm, cn и т. д. параллельны, и прямыя bo, cm, dn и т. д. также параллельны. Откуда вы заключаете, что четыреугольники $abmo$, $bcnm$, $cdpn$ и т. д. и четыреугольникъ $afko$ суть параллелограмы. Параллелограмы

$abmo$, $bcnm$, $cdpn$ и т. д. равны, потому-что ихъ половины, т. е. треугольники aob, bmc, cnd и т. д. равны. Понятно, что сумма площадей $abmo + bcnm + cdpn + deqp + efkq$ равна площади параллелограма $afko$. Проведя діагональ ak, вы получите треугольникъ akf, равный половинѣ параллелограма $afko$ и равномѣрный треугольнику anf; эти треугольники равномѣрны (§ 109), потому-что у нихъ общее основаніе af и ихъ вершины n и k лежатъ на прямой ok, параллельной къ основанію af; слѣдовательно треугольникъ anf равенъ половинѣ параллелограма $afko$, или онъ равенъ половинѣ суммы $abmo + bcnm + cdpn + deqp + efkq$. Такъ какъ половина этой суммы равна суммѣ площадей $aob + bmc + cnd + dpe + eqf$, то и площадь anf равна суммѣ $aob + bmc + cnd + dpe + eqf$, или площадь anf равна площади многоугольника ABCDE, потому-что площадь этого многоугольника равна суммѣ площадей $aob + bmc + cnd + dpe + eqf$; слѣдовательно площадь многоугольника ABCDE равна площади такого треугольника anf, въ которомъ основаніе af равняется периметру AB + BC + CD + DE + AE многоугольника и высота nh равна перпендикуляру OH, опущенному изъ центра O на одну изъ сторонъ многоугольника.

По этому правилу, относящемуся ко всѣмъ правильнымъ многоугольникамъ, легко вычислить площадь правильнаго восьмиугольника, коего сторона равна, напримѣръ 15 саж., и перпендикуляръ OH равенъ 18$^1/_2$ саж. Вы знаете, что площадь этого многоугольника должна равняться площади такого треугольника, коего высота равна 18$^1/_2$ саж. и основаніе равно периметру многоугольника. Помножьте 15 саж. на 8 — вы узнаете, что этотъ периметръ равенъ 120 саж. Потомъ вы помножите 120 на 18$^1/_2$ — получите 2220. Наконецъ вы раздѣлите 2220 на 2 — получите площадь заданнаго многоугольника, равную 1110 квад. саж.

*

§ 114. Площадь круга. Въ §§ 88, 89 и 90 вы узнали, что окружность круга можно принять за правильный многоугольникъ съ очень маленькими сторонами. На этомъ основаніи площадь круга можетъ быть вычислена точно такъ, какъ вычисляется площадь всякаго правильнаго многоугольника; слѣдовательно для вычисленія площади круга вы должны вычислить площадь такого треугольника, у котораго основаніе равно длинѣ окружности и высота равна радіусу круга. Для примѣра найдите площадь круга, коего радіусъ равенъ $4^1/_2$ аршинамъ. Сперва вы должны вычислить длину окружности, помноживъ $^{314}/_{50}$ на $4^1/_2$ (§ 90) — получите $28^{13}/_{50}$ аршина; потомъ помножьте $28^{13}/_{50}$ на $4^1/_2$ — получите $127^{17}/_{100}$; наконецъ раздѣлите $127^{17}/_{100}$ на 2 — получите $63^{117}/_{200}$ квад. саж. Изъ этого примѣра вы видите, что, для вычисленія площади круга, должно помножить число $\frac{314}{50}$ на длину радіуса, потомъ найденное число помножить опять на длину радіуса и наконецъ послѣднее полученное число раздѣлить на 2. Понятно, что площадь круга можетъ быть вычислена слѣдующимъ порядкомъ: сперва вы помножите длину радіуса ($4^1/_2$ ар.) на длину радіуса ($4^1/_2$ ар.) — получится квадратъ длины радіуса (§ 104) или $^{81}/_4$ ар.; потомъ вы помножите квадратъ длины радіуса на $^{314}/_{50}$ (получится $^{25434}/_{200}$) и наконецъ вы раздѣлите послѣднее найденное число $^{25434}/_{200}$ на 2 — получите $^{12717}/_{200}$ или $63^{117}/_{200}$ квад. ар.

§ 115. *Какъ вычислить длину радіуса для круга, коего площадь равна $235^1/_2$ квад. дюйм.?*

Вы знаете, что площадь круга равна квадрату длины радіуса, помноженной на $^{314}/_{50}$ и раздѣленному на 2; слѣдовательно удвоенная площадь круга (471 квад. дюймъ) равняется квадрату длины радіуса, помноженному на $^{314}/_{50}$. Раздѣливъ 471 на $^{314}/_{50}$, вы узнаете, что квадратъ длины радіуса равенъ $^{23550}/_{314}$. Чтобы найти длину радіуса, вы должны извлечь квадратный корень изъ числа $^{23550}/_{314}$ — получите $^{2719}/_{314}$ или $8^{207}/_{314}$ дюйма.

$$\frac{23550\times314}{314\times314}=\frac{7394700}{314\times314}$$

$\sqrt{7394700} = 2719$

4

339 : 4

28

59

49

1047 : 54

54

507

1

50600 : 542

4878

1820

81

1739

$\sqrt{314\times314} = 314$

$$\begin{array}{r|l} 2719 & 314 \\ \cline{2-2} 2512 & 8^{207}/_{314} \\ \hline 207 & \end{array}$$

§ 116. *Найти площадь круга, окружность котораго содержитъ $49^1/_2$ вершковъ.*

Сперва вы должны вычислить радіусъ окружности, содержащей $49^1/_2$ вершк. Для этого вы раздѣлите (§ 90) $49^1/_2$ на $\frac{314}{50}$ — получите $\frac{4950}{628}$ вершка. Вы знаете, что площадь разсматриваемаго круга должна равняться площади такого треугольника, у котораго основаніе равно $49^1/_2$ вершк. и высота равна $\frac{4950}{628}$ верш.; слѣдовательно, для полученія площади круга, вы помножите $49^1/_2$ на $\frac{4950}{628}$ $\left(\text{получится } \frac{245025}{628}\right)$ и раздѣлите $\frac{245025}{628}$ на 2 — получите $195\frac{105}{1256}$ квад. вершк.

§ 117. *Вычислить площадь NEM (фиг. 116) части круга, заключенной между дугою NM и двумя радіусами EN и EM, когда извѣстно, что центральный уголъ NEM равенъ 25° и радіусъ NE равенъ 28 дюймамъ.*

Сперва вы должны вычислить площадь круга, коего радіусъ EN равенъ 28 дюймамъ — получите $2461\frac{19}{25}$ квад.

дюйма. Площадь NEM во столько разъ меньше площади круга, во сколько разъ 25^0 дуги NM меньше 360^0. Такъ какъ дуга NM составляетъ $\frac{25}{360}$ или $^{5}/_{72}$ окружности (§ 93), то площадь NEM равна $^{5}/_{72}$ частямъ площади $2461\frac{19}{25}$ кв. дюйм. Откуда вы заключаете, что число $2461\frac{19}{25}$ надобно помножить на $^{5}/_{72}$ — получите площадь NEM, равную $170^{43}/_{45}$ кв. дюйм.

§ 118. *Какъ вычислить площадь BbC (фиг. 96) части круга, заключенной между дугою BbC и ея хордою BC, когда извѣстно, что дуга BbC содержитъ 84^0, радіусъ BO равенъ $3^{1}/_{2}$ дюймамъ, высота bn дуги BbC равна $1^{1}/_{8}$ дюйма и хорда BC равна $2^{1}/_{2}$ дюйм.?*

Сперва вы вычислите площадь круга, коего радіусъ равенъ $3^{1}/_{2}$ дюйм. — получите $38\frac{93}{200}$ квадр. дюйма. Потомъ вы вычислите площадь BbCO, составляющую $^{7}/_{30}$ площади круга, какъ объяснено въ § 117 — получите $8\frac{5851}{6000}$ квад. дюйма. Наконецъ вы вычислите площадь треугольника BOC, коего высота *On* равна *Ob* — *bn*, или *On* $= 2^{3}/_{8}$ дюйма; площадь треугольника BOC равна $2\frac{31}{32}$ квад. дюйм. Чтобы получить площадь BbC, вы должны вычесть площадь BOC изъ площади BbCO, или $2\frac{31}{32}$ изъ $8\frac{5851}{6000}$ — получите $6\frac{77}{12000}$ квад. дюйма.

§ 119. Двѣ окружности, описанныя разными радіусами изъ одного и того-же центра, называются *концентрическими* или *одноцентренными* окружностями.

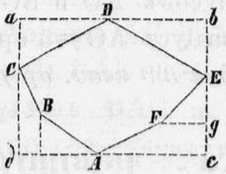
Вычислить площадь, заключенную между двумя одноцентренными окружностями, когда извѣстно, что радіусъ меньшей окружности равенъ $1^{2}/_{5}$ дюйма и радіусъ большей окружности содержитъ $4^{9}/_{10}$ дюйма.

Вычислите площадь большаго круга — получите $75^{3914}/_{10000}$ квад. дюйма. Потомъ вычислите площадь малаго круга — получите $6^{386}/_{2500}$ квад. дюйма. Чтобы получить площадь, заключенную между двумя заданными окружностями, вы должны вычесть $6^{386}/_{2500}$ изъ $75^{3914}/_{10000}$ — получите $69^{237}/_{1000}$ квад. дюйма.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Периметръ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника содержитъ 60 саж. и гипотенуза равна 25 саж.; сколько квад. саж. содержитъ площадь этого треугольника? — *($153^{1}/_{8}$ квад. саж.)* — 2) Площадь прямоугольнаго треугольника, коего одинъ катетъ равенъ $20^{3}/_{4}$ саж., содержитъ $191^{15}/_{16}$ квадр. саж.; сколько сажень въ другомъ катетѣ? — *($18^{1}/_{2}$ саж.)* — 3) Сколько сажень должна содержать высота треугольника, коего основаніе равно 24 саж. и площадь содержитъ 186 кв. саж.? — *($15^{1}/_{2}$ саж.)* — 4) Треугольникъ ACE (фиг. 122) равномѣренъ треугольнику ABC, основаніе AC равно $16^{3}/_{4}$ саж. и площадь ABC равна 201 квад. саж.; сколько сажень содержитъ высота EH? — *(24 саж.)* — 5) Площадь трапеціи ABCD (фиг. 122) содержитъ 408 квад. саж., сторона AB равна 26 саж. и сторона CD равна 25 саж.; сколько сажень содержитъ высота DH? — *(16 саж.)*. — 6) Въ трапеціи ABCD (фиг. 122) высота DH равна 19 саж., сторона DC равна 27 саж. и сторона AB равна 37 саж.; сколько квадратныхъ сажень содержитъ площадь ABCD? — *(608 квад. саж.)* 7) Въ четыреугольникѣ ABCD (фиг. 123) діагональ AC равна 124 саж., перпендикуляръ BE = 75 саж. и перпендикуляръ DF = 93 саж.; сколько квадратныхъ сажень содержитъ площадь ABCD? — *(10416 квад. саж.)*. — 8) Какимъ образомъ должно провести діагонали въ многоугольникѣ ABCDEF (фиг. 128), чтобы для вычисленія его площади пришлось измѣрить наименьшее число линій? — 9) Вычислить площадь правильнаго двѣнадцатиугольника, когда его сторона равна $10^{1}/_{2}$ саж. и перпендикуляръ, опущенный изъ центра на одну изъ сторонъ многоугольника, равенъ 18 саж. — *(1134 квад. саж.)*. — 10)

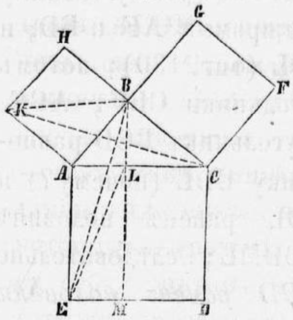
фиг. 128.



Для вычисленія площади многоугольника ABCDEF (фиг. 128) начерченъ прямоугольникъ *abcd*, въ которомъ $ab = 74$ саж. и $bc = 79$ саж.; потомъ найдено: $a\mathrm{D} = 43$ саж., $a\mathrm{C} = 45$ саж., $\mathrm{A}d = 37$ саж., $\mathrm{A}f = 19$ саж., $\mathrm{B}f = 15$ саж., $\mathrm{F}g = 23$ саж., $cg = 22$ саж., $g\mathrm{E} = 35$ саж.; сколько квадратныхъ сажень содержитъ площадь ABCDEF? — *($2891\frac{1}{2}$ квад. саж.)*. — 11) Въ многоугольникѣ ABCDEFGH (фиг. 125) діагональ AD = 213 саж., AK=23 саж., AL=57 саж., AM=69 саж., DP=25 саж., DO=29 саж., DN=49 саж., BL = 95 саж., CO = 73 саж., EP=76 саж., FN=83 саж., GM = 79 саж., HK = 77 саж.; сколько квадратныхъ сажень въ этомъ многоугольникѣ? — *($29460\frac{1}{2}$ квад. саж.)*. — 12) Найти діаметръ круга, содержащаго $113\frac{1}{7}$ квад. вершка. — *(Почти 12 вершковъ)*. — 13) Найти площадь круга, коего окружность содержитъ $209\frac{1}{3}$ аршина. — *($3488\frac{8}{9}$ квад. ар.)*. — 14) Найти площадь полукруга, діаметръ котораго равенъ 5 аршинамъ. — *($9\frac{13}{16}$ квад. ар.)*. — 15) Найти площадь четверти круга, радіусъ котораго равенъ $7\frac{1}{2}$ дюймамъ. — *($44\frac{5}{32}$ квад. дюйм.)*. — 16) Найти площадь OB*b*C (фиг. 96) части круга, когда дуга B*b*C равна 72° и радіусъ OB=5 дюйм. — *($15\frac{7}{10}$ квад. дюйм.)*. — 17) Сколько квадратныхъ дюймовъ содержитъ площадь B*b*C (фиг. 96), когда радіусъ OB = $7\frac{1}{2}$ дюйм., O*n*=$6\frac{1}{2}$ дюйм. и дуга B*b*C = 60°? — *($5\frac{1}{16}$ квад. дюйм.)*. — 18) Найти площадь B*b*C (фиг. 96), когда уголъ BOC=90°, радіусъ BO=$3\frac{3}{4}$ вершка и BC=$5\frac{1}{4}$ вершка. — (Здѣсь треугольникъ BO*n* равнобедренный, слѣдовательно — ? — *$4\frac{19}{128}$ квад. вершк.)*. — 19) Вычислить площадь, заключающуюся между двумя окружностями, имѣющими радіусы въ $23\frac{3}{4}$ дюйма и $3\frac{1}{8}$ дюйма. — *(Почти $1740\frac{1}{2}$ квадр. дюйм.)*. — 20) Вычислить площадь ABDC, заключенную между двумя одноцентренными дугами AB и CD и частями AC и BD радіусовъ AO и BO, когда извѣстно, что дуга AB содержитъ 54°, радіусъ AO = 3 аршинамъ и радіусъ CO = $1\frac{1}{4}$ аршина. — *(Почти $3\frac{1}{2}$ квад. ар.)*

§ 120. Вычисленіе квадрата, равнаго суммѣ или разности двухъ квадратовъ.

фиг. 129.



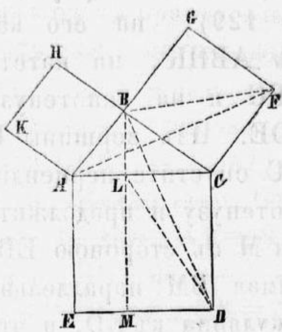
Начертите прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 129), на его катетѣ AB квадратъ ABHK, на катетѣ BC квадратъ BCFG и на гипотенузѣ AC квадратъ ACDE. Изъ вершины B прямаго угла ABC опустите перпендикуляръ BL на гипотенузу и продолжите его до пересѣченія M съ стороною ED. Понятно, что прямая BM параллельна къ AE и перпендикулярна къ ED, и что прямая LM раздѣляетъ квадратъ ACDE на два прямоугольника AEML и CDML.

Сперва вы должны разсмотрѣть прямоугольникъ AEML. Для этого вы проведете прямыя KC и BE, и діагонали KB и EL. Теперь обратите вниманіе на треугольники ABK, ACK, AEL и ABE. Треугольникъ ABE равномѣренъ треугольнику AEL (§ 109), потому-что у нихъ общее основаніе AE и ихъ вершины B и L находятся на прямой BM, параллельной къ AE; но такъ какъ треугольникъ AEL есть половина прямоугольника AEML, то *треугольникъ ABE равномѣренъ половинѣ прямоугольника AEML.*

Треугольникъ ACK равномѣренъ треугольнику ABK, потому-что у нихъ общее основаніе AK и ихъ вершины C и B находятся на прямой CH, параллельной къ AK. Такъ какъ треугольникъ ABK есть половина квадрата ABHK, то *треугольникъ ACK равномѣренъ половинѣ квадрата ABHK.*

Треугольники ABE и ACK равны (§ 25), потому-что стороны AB и AK равны, какъ стороны квадрата ABHK, стороны AC и AE равны, какъ стороны квадрата ACDE, и углы BAE и CAK равны, ибо они состоятъ изъ равныхъ угловъ BAC и BAC, CAE и BAK. По равенству этихъ треугольниковъ вы заключаете, что половина прямоугольника AEML равномѣрна половинѣ квадрата ABHK; слѣдовательно *прямоугольникъ AEML равномѣренъ квадрату ABHK.*

фиг. 130.



Теперь обратитесь къ прямоугольнику CDML. Проведите прямыя AF и BD, и діагонали BF и DL (фиг. 130); потомъ разсмотрите треугольники CBF, ACF, CDL и BCD. Треугольникъ BCD равномѣренъ треугольнику CDL (почему?) и треугольникъ CDL равенъ половинѣ прямоугольника CDML; слѣдовательно *треугольникъ BCD равенъ половинѣ прямоугольника CDML.*

Треугольникъ ACF равномѣренъ треугольнику BCF почему?) и треугольникъ BCF равенъ половинѣ квадрата BCFG; слѣдовательно *треугольникъ ACF равномѣренъ половинѣ квадрата BCFG.*

Треугольники BCD и ACF равны, потому-что стороны BC и CF равны (почему?), стороны CD и AC равны (почему?) и углы BCD и ACF равны (они составлены изъ равныхъ угловъ BCA и BCA, ACD и BCF). Такъ какъ эти треугольники равны, то вы заключаете, что половина прямоугольника CDML равномѣрна половинѣ квадрата BCFG; слѣдовательно *прямоугольникъ CDML равномѣренъ квадрату BCFG.*

Итакъ вы узнали, что прямоугольникъ AEML равномѣренъ квадрату ABHK, и прямоугольникъ CDML равномѣренъ квадрату BCFG; слѣдовательно площадь AEML, сложенная съ площадью CDML, равномѣрна площади ABHK, сложенной съ площадью BCFG, или *площадь ACDE равномѣрна суммѣ площадей ABHK и BCFG.*

§ 121. Вычисленіе гипотенузы прямоугольнаго треугольника. Предположите, что катетъ BC равенъ 64 саженямъ и катетъ AB равенъ 36 саж. Какъ найти длину гипотенузы? — Площадь квадрата ABHK должна содержать 36 × 36 или 1296 квад. саж., площадь квадрата BCFG равна 64×64 или 4096 квад. саж. По предъидущему (§ 120) вамъ извѣстно, что площадь квадрата ACDE равно-

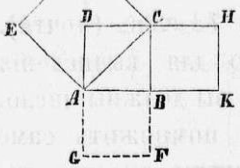
мѣрна суммѣ площадей ABHK и BCFG; слѣдовательно квадратъ ACDE долженъ содержать 1296 и 4096, т. е. 5392 квад. саж. Чтобы найти длину AC квадрата, коего площадь содержитъ 5392 квад. саж., вы должны извлечь квадратный корень изъ числа 5392 (§ 105) — получите 73 саж. (почти). — Изъ этого примѣра вы заключаете, что для вычисленія длины гипотенузы, когда катеты извѣстны, вы должны число, которымъ выражена длина перваго катета, помножить само на себя; потомъ вы должны помножить число втораго катета также само на себя; полученныя квадратныя числа вы должны сложить и наконецъ изъ этой суммы извлечь квадратный корень.

§ 122. Вычисленіе катета прямоугольнаго треугольника. Предположите, что катетъ BC равенъ 48 саж. и гипотенуза AC равна 73 саж. Какъ вычислить длину катета AB? — Площадь квадрата ACDE содержитъ 73 × 73 или 5329 квад. саж. и площадь квадрата BCFG равна 48 × 48 или 2304 квад. саж. Извѣстно (§ 120), что площадь ACDE равна площади BCFG, сложенной съ площадью ABHK; слѣдовательно площадь ABHK равна площади ACDE безъ площади BCFG. По этому вычтя 2304 квад. саж. изъ 5329 квад. саж., вы узнаете, что площадь ABHK равна 3025 квад. саж. Наконецъ, чтобы вычислить длину стороны AB квадрата, коего площадь равна 3025 квад. саж., вы должны извлечь квадратный корень изъ числа 3025 (§ 105) — получите 55 сажень. Изъ этого примѣра вы заключаете, что для вычисленія длины катета, когда извѣстны гипотенуза и другой катетъ, вы должны число, которымъ выражена длина гипотенузы, помножить само на себя; потомъ число, которымъ выражена длина извѣстнаго катета, вы помножите также само на себя; второе квадратное число вы должны вычесть изъ перваго и наконецъ извлечь квадратный корень изъ полученной разности.

§ 123. *Начертить квадратъ, коего площадь должна быть вдвое больше квадрата ABCD* (фиг. 131).

Въ квадратѣ ABCD проведите діагональ AC и на ней начертите квадратъ ACLE. Начертите также квадраты BCHK и ABFG на сторонахъ BC и AB; эти квадраты равны квадрату ABCD (почему?) и слѣдовательно равны между собою. Извѣстно, что квадратъ ACLE, начерченный на гипотенузѣ AC прямоугольнаго треугольника ABC, равенъ суммѣ квадратовъ ABFG и BCHK, начерченныхъ на катетахъ AB и BC; но такъ какъ здѣсь эти квадраты ABFG и BCHK равны, то сумма ихъ площадей равна удвоенной площади ABFG, или удвоенной площади ABCD. Откуда вы заключаете, что *для полученія квадрата, коего площадь должна быть вдвое больше площади квадрата ABCD, вы начертите квадратъ на діагонали заданнаго квадрата.*

фиг. 131.

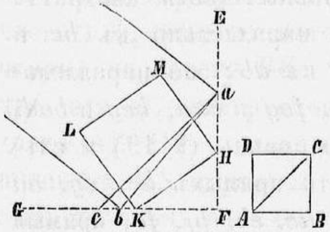


Вычисленіе катета равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника. Предположите, что гипотенуза AC (фиг. 131) равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника ABC содержитъ 75 саж. Какъ найти длину одного изъ катетовъ? — Квадратъ, начерченный на гипотенузѣ, долженъ содержать 75 × 75, или 5625 квад. саж. Вы знаете, что площадь этого квадрата равна суммѣ двухъ равныхъ квадратовъ, или равна удвоенной площади квадрата ABFG; слѣдовательно площадь ABFG равна половинѣ площади ACLE, или равна половинѣ числа 5625 квад. саж. Чтобы вычислить сторону AB квадрата ABFG, коего площадь содержитъ $\frac{5625}{2}$ квадр. саж., вы должны извлечь квадратный корень изъ числа $\frac{5625}{2}$ — получите 53 саж. — Изъ этого примѣра вы заключаете, что для вычисленія катета равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, вы должны число, которымъ выражена гипотенуза, помножить само на себя; потомъ вы должны раздѣлить это квадратное число на 2 и наконецъ изъ послѣдняго найденнаго числа извлечь квадратный корень.

§ 126. *Начертить квадратъ, коего площадь должна быть втрое больше квадрата ABCD* (фиг. 132).

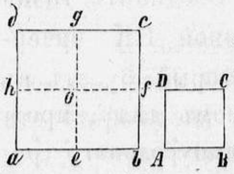
Въ квадратѣ ABCD проведите діагональ AC; потомъ начертите прямой уголъ EFG и на его сторонахъ отложите часть FH, равную сторонѣ AB, и часть FK, равную діагонали AC. Соединивъ точки H и K прямою HK, вы на ней начертите квадратъ HKLM; этотъ квадратъ втрое больше квадрата ABCD. Дѣйствительно, представьте себѣ, что на катетахъ FK и FH прямоугольнаго треугольника FHK начерчены квадраты. Понятно, что квадратъ, начерченный на катетѣ FH, равенъ квадрату ABCD, и квадратъ, начерченный на катетѣ KF, вдвое больше квадрата ABCD, потому-что катетъ KF равенъ діагонали AC; стало быть оба эти квадрата вмѣстѣ втрое больше квадрата ABCD. Также оба эти квадрата вмѣстѣ равны площади квадрата HKLM, начерченнаго на гипотенузѣ HK; слѣдовательно площадь HKLM втрое больше квадрата ABCD.

фиг. 132.



Начертить квадратъ, коего площадь должна быть вчетверо больше квадрата ABCD (фиг. 133).

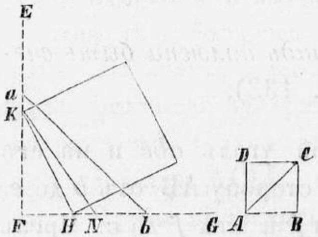
фиг. 133.



Начертите прямой уголъ *abc* и на его сторонахъ отложите сторону AB отъ *b* до *e*, отъ *e* до *a*, отъ *b* до *f* и отъ *f* до *c*. Чрезъ точку *c* проведите прямую *cd* параллельно къ *ab*, и чрезъ точку *a* прямую *ad* параллельно къ *bc* — получится требуемый квадратъ *abcd*. Въ самомъ дѣлѣ, по параллельности прямыхъ *bc* и *ad*, прямая *ad* перпендикулярна къ *ab* и уголъ *bad* прямой; по параллельности прямыхъ *cd* и *ab*, прямая *cd* перпендикулярна къ *bc* и уголъ *bcd* прямой. Такъ какъ въ четыреугольникѣ *abcd* три угла *abc*, *bad* и *bcd* прямые, то (§ 47) и четвертый уголъ *adc* долженъ быть прямой. Прямыя *ab* и *bc* равны, потому-что каждая изъ нихъ равна удвоенной сторонѣ AB. По параллельности прямыхъ *ab* и *cd*, *ad* и *bc*, прямыя *ab* и *cd*, *ad* и *bc* (§ 39) равны; слѣдовательно четыреугольникъ *abcd*, въ которомъ углы прямые и стороны равны, есть квадратъ. Чрезъ точку *e* проведите прямую *eg* параллельно къ *bc* и чрезъ точку *f* прямую *fh* параллельно къ *ab;* по параллельности этихъ прямыхъ, углы *cfo* и *abc*, *fog* и *bad*, *beg* и *bad*, *cge* и *adc*, *goh* и *abc*, *hoe* и *bcd* и т. д. равны (§ 19) и слѣдовательно прямые. По параллельности прямыхъ *bc*, *eg*, *ad* и *ab*, *hf*, *dc*, и по равенству прямыхъ *ae*, *eb*, *bf*, *fc*, прямыя *ah*, *oe*, *ho*, *of*, *hd*, *og*, *dg*, *gc* равны между собою и равны прямымъ *ae*, *eb*, *bf*, *fc*. Откуда вы заключаете, что каждый изъ четыреугольниковъ, образовавшихся въ квадратѣ *abcd*, есть квадратъ, равный квадрату ABCD; слѣдовательно квадратъ *abcd*, содержащій четыре квадрата ABCD, вчетверо больше квадрата ABCD.

§ 125. *Начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ пять разъ больше квадрата ABCD* (фиг. 134).

фиг. 134.



Начертите прямой уголъ EFG, отложите на его сторонѣ FG часть FH, равную сторонѣ AB, и на сторонѣ FE часть FK, равную удвоенной сторонѣ AB. Соедините точки H и K и на прямой HK начертите квадратъ, который будетъ въ пять разъ больше квадрата ABCD. Въ самомъ дѣлѣ, представьте себѣ, что на катетахъ FK и FH прямоугольнаго треугольника FKH начерчены квадраты P и Q; тогда квадратъ P, начерченный на сторонѣ FK, вчетверо больше квадрата ABCD, и квадратъ Q равенъ квадрату ABCD; стало быть квадраты P и Q вмѣстѣ въ пять разъ больше квадрата ABCD; но квадраты P и Q вмѣстѣ равны квадрату (§ 120), начерченному на гипотенузѣ HK; слѣдовательно и этотъ квадратъ въ пять разъ больше квадрата ABCD.

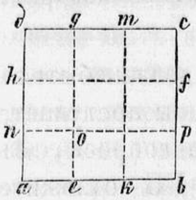
Чтобы начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ *шесть* разъ больше квадрата ABCD (фиг. 134), вы поступаете точно такъ, какъ при рѣшеніи предъидущаго вопроса, съ тою только разницею, что вы на сторонѣ FG отложите часть FN, равную діагонали AC. Тогда квадратъ P, начерченный на катетѣ FK, вчетверо больше квадрата ABCD, и квадратъ Q, начерченный на катетѣ FN, вдвое больше квадрата ABCD; слѣдовательно квадратъ, начерченный на гипотенузѣ KN и равный суммѣ квадратовъ P и Q, долженъ быть въ шесть разъ больше квадрата ABCD.

§ 126. *Начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ семь разъ больше квадрата ABCD.*

Сперва вы начертите квадратъ HKLM (фиг. 132), коего площадь втрое больше квадрата ABCD точно такъ, какъ объяснено въ (§ 124); потомъ отъ F до *a* вы отложите сторону AB два раза и отъ F до *b* сторону HK; наконецъ на прямой *ab* вы начертите квадратъ. Тогда квадратъ P, начерченный на катетѣ *a*F прямоугольнаго треугольника *ab*F, вчетверо больше квадрата ABCD, и квадратъ Q, начерченный на катетѣ *b*F, втрое больше квадрата ABCD; слѣдовательно квадратъ, начерченный на гипотенузѣ *ab* и равный суммѣ квадратовъ P и Q, въ семь разъ больше квадрата ABCD.

Чтобы начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ восемь разъ больше квадрата ABCD (фиг. 132), вы отложите сторону AB два раза отъ F до *a* и два раза отъ F до *c*, и начертите квадратъ на гипотенузѣ *ac* прямоугольнаго треугольника *ac*F. Легко объяснить, что этотъ квадратъ въ восемь разъ больше квадрата ABCD.

§ 127. *Какъ начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ девять разъ больше квадрата ABCD?*



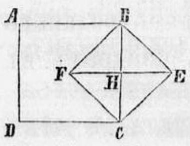
Фиг. 135.

Начертите прямой уголъ и на его сторонахъ отложите сторону AB три раза отъ *b* до *a* и три раза отъ *b* до *c* (фиг. 135). Чрезъ точку *c* проведите прямую *cd* параллельно къ *ab* и чрезъ точку *a* прямую *ad* параллельно къ *bc* — получите квадратъ *abcd* (что объясняется точно такъ, какъ въ § 124). По предъидущему (§ 124) легко объяснить, что параллельными прямыми *eg* и *km*, *hf* и *np* въ квадратѣ *abcd* образуются квадраты, равные между собою и равные квадрату ABCD. Этихъ квадратовъ должно быть девять, потому-что на прямой *ab* образовалось три квадрата и по прямой *ad* помѣстилось три ряда, въ каждомъ ряду по три квадрата; слѣдовательно площадь *abcd* въ девять разъ больше квадрата ABCD.

Чтобы начертить квадратъ, коего площадь должна быть въ *десять* разъ больше квадрата ABCD, вы должны начертить прямоугольный треугольникъ FHK (фиг. 134) точно такъ, какъ объяснено въ (§ 125). Потомъ вы отложите сторону HK отъ F до *a* и отъ F до *b*, и на гипотенузѣ *ab* прямоугольнаго треугольника *ab*F начертите квадратъ. По предъидущему легко объяснить, что полученный квадратъ въ десять разъ больше квадрата ABCD.

Руководствуясь пріемами, изложенными въ послѣднихъ §§, вы сами можете начертить квадраты, которые будутъ въ 11, 12, 13 и т. д. разъ больше заданнаго квадрата.

§ **128**. *Какъ начертить квадратъ коего площадь должна быть вдвое меньше квадрата ABCD* (фиг. 136)?



Фиг. 136.

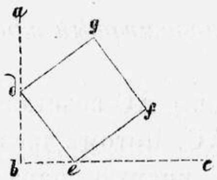
Раздѣлите сторону BC въ точкѣ H по-поламъ и проведите прямую чрезъ точку H перпендикулярно къ BC. На этомъ перпендикулярѣ отложите части HE и HF, равныя прямой BH, и наконецъ проведите прямыя BF, BE, CE и CF; полученный четыреугольникъ BECF есть квадратъ (§ 51). Вы видите, что здѣсь на діагонали BC квадрата BECF начерченъ квадратъ ABCD; слѣдовательно по предъидущему (§ 123) квадратъ ABCD вдвое больше квадрата BECF, или на оборотъ: квадратъ BECF вдвое меньше квадрата ABCD.

Чтобы начертить квадратъ, равный четвертой части квадрата *abcd* (фиг. 133), вы раздѣлите сторону *ab* въ точкѣ *e* по-поламъ, проведете прямую AB, равную части *ae*, и на AB начертите квадратъ ABCD, который, какъ уже извѣстно (§ 124), вчетверо меньше квадрата *abcd*.

Какъ начертить квадратъ, равный восьмой части квадрата abcd?

Сперва вы начертите квадратъ ABCD (фиг. 133), равный одной четверти квадрата *abcd*, и потомъ квадратъ BECF (фиг. 136), равный половинѣ квадрата ABCD.

Начертить квадратъ, равный тремъ-четвертямъ квадрата ABCD.



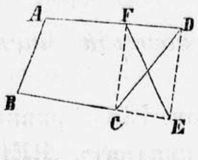
Фиг. 137.

Сперва вы начертите квадратъ BECF (фиг. 136), равный половинѣ квадрата ABCD. Потомъ вы начертите прямой уголъ *abc* (фиг. 137) и отложите на его сторонахъ часть *bd*, равную сторонѣ BE, и часть *be*, равную прямой BH. Наконецъ проведя прямую *ed*, на ней начертите квадратъ *defg*; этотъ квадратъ равенъ тремъ-четвертямъ квадрата ABCD. Дѣйствительно, квадратъ, начерченный на катетѣ *be* прямоугольнаго треугольника *bde*, равенъ $^1/_4$ площади ABCD, потому-что сторона *be* равна $^1/_2$ стороны BC (§ 124), и квадратъ, начерченный на катетѣ *bd*, равенъ $^1/_2$ площади ABCD; эти два квадрата вмѣстѣ составляютъ $^1/_4$ съ $^1/_2$, или $^3/_4$ площади ABCD; но такъ какъ эти два квадрата вмѣстѣ равны квадрату, начерченному на гипотенузѣ *de*, то квадратъ *defg* равенъ $^3/_4$ площади ABCD.

Чтобы начертить квадратъ, равный третьей долѣ квадрата *abcd* (фиг. 135), вы раздѣлите квадратъ *abcd* на девять равныхъ частей (§ 127) и потомъ начертите квадратъ, коего площадь втрое больше площади *aeon*, какъ объяснено въ (§ 124).

§ 129. *Сторону AD четыреугольника ABCD (фиг. 138) требуется укоротить на DF; на сколько должно удлинять сторону BC, чтобы площадь не измѣнилась?*

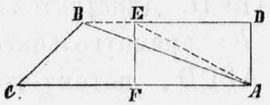
фиг. 138.



Проведите прямую FC и продолжите сторону BC. Потомъ чрезъ вершину D проведите прямую DE параллельно къ FC и наконецъ прямою EF соедините точку F съ точкою E пересѣченія прямыхъ BE и DE. Четыреугольникъ ABCD замѣнится четыреугольникомъ ABEF. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники CDF и CEF равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе FC и ихъ вершины D и E находятся на прямой, параллельной къ основанію. Такъ какъ эти треугольники равномѣрны, то площадь ABCF съ площадью CDF равномѣрна площади ABCF съ площадью CEF, или площадь ABCD равномѣрна площади ABEF.

§ 130. *Начертить прямоугольникъ равномѣрный треугольнику ABC* (фиг. 139).

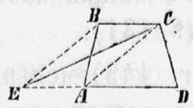
фиг. 139.



Изъ вершины A и изъ средины F стороны AC возставьте перпендикуляры къ AC. Потомъ чрезъ вершину B проведите прямую параллельно къ AC такъ, чтобы она пересѣклась съ проведенными перпендикулярами — получится требуемый прямоугольникъ ADEF. Въ самомъ дѣлѣ, проведя діагональ AE, вы получите треугольникъ AEF, равный половинѣ прямоугольника ADEF. Также площадь AEF равна половинѣ площади ABC, потому-что у этихъ треугольниковъ высоты равны, а основаніе AF равно половинѣ основанія AC. Откуда вы заключаете, что площади ADEF и ABC равны.

§ 131. *Начертить треугольникъ, равномѣрный трапеціи* (фиг. 140).

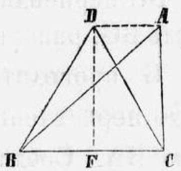
фиг. 140.



Проведите діагональ AC и къ ней параллельно прямую BE чрезъ вершину B до пересѣченія E съ продолженной стороною DA. Потомъ соедините вершину C съ точкою E — получите требуемый треугольникъ CDE. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники ACB и ACE равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе AC и ихъ вершины B и E находятся на прямой, параллельной къ AC. По этой причинѣ площадь, состоящая изъ площадей ACB и ACD, равномѣрна площади, составленной изъ площадей ACE и ACD, т. е. площадь ABCD равномѣрна площади CDE.

§ 132. *Треугольникъ ABC замѣнить равномѣрнымъ ему равнобедреннымъ треугольникомъ* (фиг. 141).

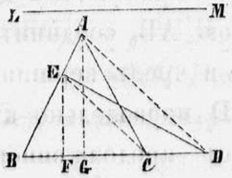
фиг. 141.



Изъ средины F основанія BC возставьте перпендикуляръ и чрезъ вершину A проведите прямую параллельно къ основанію; эта параллельная прямая пересѣкается съ проведеннымъ перпендикуляромъ въ точкѣ D. Соедините прямыми DB и DC точку D съ вершинами B и C — получите требуемый треугольникъ BCD. Этотъ треугольникъ равнобедренный, потому-что перпендикуляръ DF проведенъ между вершиною D и срединою противолежащей стороны BC (§ 27). Треугольники ABC и DBC равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе BC и ихъ вершины A и D находятся на прямой, параллельной къ основанію.

§ 133. *Начертить треугольникъ, равномѣрный треугольнику ABC, и съ основаніемъ, равнымъ прямой LM* (фиг. 142).

фиг. 142.

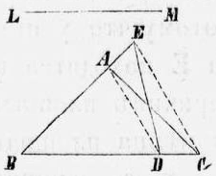


Отъ точки B до D отложите часть, равную прямой LM, и соедините точки A и D. Чрезъ вершину C проведя прямую CE параллельно къ AD, соедините точки D и E прямою DE — получите требуемый треугольникъ BDE. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники

ABC и BDE равномѣрны, потому-что у нихъ общая часть BEC и ихъ части AEC и DEC равномѣрны (§ 131).

Можетъ случиться, что прямая LM (фиг. 143) меньше стороны BC; тогда точка D придется между вершинами B и C. Соединивъ точку D съ вершиною A, вы проведете прямую CE параллельно къ AD до пересѣченія E съ продолженною стороною BA и соедините точки E и D прямою ED. Треугольники BED и ABC равномѣрны, потому-что они содержатъ общую часть ABD и равномѣрныя части EAD и CAD (§ 131).

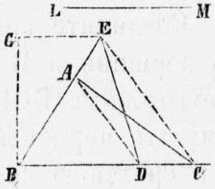
фиг. 143.



§ 134. *Начертить треугольникъ, равномѣрный треугольнику ABC, и съ высотою, равною прямой LM* (фиг. 144).

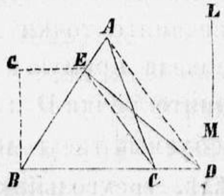
Изъ вершины B возставьте къ основанію BC перпендикуляръ и на немъ отложите часть BG, равную прямой LM. Чрезъ точку G проведите прямую параллельно къ BC до пересѣченія E съ продолженною стороною BA. Соединивъ точку E съ вершиною C, проведите чрезъ A прямую AD параллельно къ CE и наконецъ соедините точки D и E прямою DE — получите требуемый треугольникъ BDE. Въ самомъ дѣлѣ, его высота равна прямой BG или LM, и онъ равномѣренъ треугольнику ABC, потому-что онъ и заданный треугольникъ содержатъ общую часть ABD и равномѣрныя части ADE и ADC (§ 131).

фиг. 144.



При рѣшеніи этого вопроса можетъ случиться, что прямая LM меньше высоты треугольника ABC; тогда вы проведете прямую GE до пересѣченія E съ стороною AB, соедините точку E съ вершиною C и чрезъ вершину A проведете прямую AD параллельно къ EC до пересѣченія D съ продолженною стороною BC. Треугольникъ BED требуемый; его высота равна прямой BG или LM; онъ равномѣренъ треугольнику ABC, потому-что онъ съ треугольникомъ ABC имѣетъ общую часть BEC, и части AEC и DEC равномѣрны.

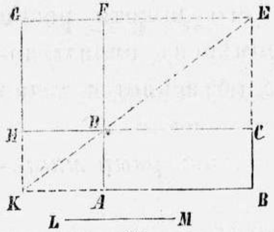
фиг. 145.



§ 135. *Начертить прямоугольникъ, равномѣрный прямоугольнику ABCD, и съ основаніемъ, равнымъ прямой LM* (фиг. 146).

На продолженіи стороны BC отложите часть CE, равную прямой LM, и чрезъ точки E и D проведите прямую до пересѣченія K съ продолженною стороною BA. Чрезъ точку E проведите прямую EG параллельно къ AB и чрезъ точку K прямую KG параллельно къ BE. Продолживъ сторону CD до точки H и сторону AD до точки F, вы получите требуемый прямоугольникъ DFGH. Въ самомъ дѣлѣ, основаніе этого прямоугольника равно прямой CE или LM. Остается объяснить, что прямоугольники DFGH и ABCD равномѣрны. Треугольники DHK и ADK равны, также треуг. EDF = треуг. CDE и треуг. EGK = треуг. BEK. Отъ равныхъ треугольниковъ EGK и BEK отнимите по-ровну — у васъ получатся равные остатки. Для полученія этихъ остатковъ вы отнимите отъ треугольника EGK сперва треугольникъ EDF и потомъ треугольникъ DHK — останется прямоугольникъ DFGH. Отъ треугольника BEK отнимите сперва треугольникъ CDE и потомъ треугольникъ ADK — останется прямоугольникъ ABCD. Такъ какъ полученные остатки должны быть равны, то прямоугольники DFGH и ABCD равномѣрны.

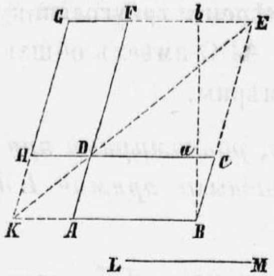
фиг. 146.



§ 136. *Начертить параллелограмъ, имѣющій высоту LM и равномѣрный параллелограму ABCD* (фиг. 147).

Въ параллелограмѣ ABCD проведите высоту Ba и на

фиг. 147.

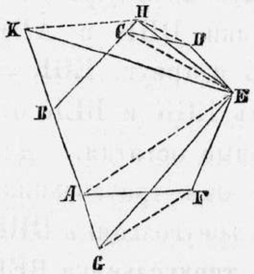


ея продолженіи отложите часть *ab*, равную прямой **LM**. Чрезъ точку *b* проведите прямую параллельно къ **AB** до пересѣченія съ продолженною стороною **BC**, чрезъ точки **E** и **D** прямую **EK** до пересѣченія съ продолженною стороною **BA** и чрезъ точку **K** прямую параллельно къ **BE** до пересѣченія **G** съ прямою **EG**. Продоживъ стороны **CD** и **AD** до точекъ **H** и **F**, вы получите требуемый параллелограмъ **DFGH**, потому-что во 1-хъ его высота равна прямой *ab* или **LM**, и во 2-хъ онъ равномѣренъ параллелограму **ABCD**. Послѣднее обстоятельство объясняется точно такъ, какъ въ (§ 135).

§ 137. *Начертить треугольникъ, равномѣрный многоугольнику ABCDEF* (фиг. 148).

Проведите діагональ **AE** и къ ней параллельно прямую **FG** до пересѣченія **G** съ продолженной стороною **BA**. Соединивъ точки **E** и **G**, вы получите пятиугольникъ **BCDEG**, равномѣрный шестиугольнику **ABCDEF**. Въ самомъ дѣлѣ, эти многоугольники содержатъ общую часть **ABCDE** и ихъ части **AEF** и **AEG** равномѣрны (§ 131). Въ пятиугольникѣ **BCDEG** проведите діагональ **EC** и къ ней параллельно прямую **DH** до пересѣченіи **H** съ продолженной стороною **BC**. Соединивъ точки **E** и **H**, вы получите четыреугольникъ **BHEG**, равномѣрный пятиугольнику **BCDEG**, потому-что въ этихъ двухъ многоугольникахъ общая часть **BCEG** и части **CEH** и **CED** равномѣрны (§ 131). Такъ какъ площади **BCDEG** и **ABCDEF** равны и также площади **BCDEG** и **BHEG** равны, то вы заключаете, что четыреугольникъ **BHEG** равномѣренъ шестиугольнику

фиг. 148.



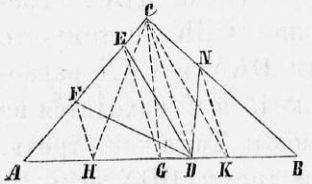
ABCDEF. Въ четыреугольникѣ **BHEG** проведите діагональ **BE** и къ ней параллельно чрезъ вершину **H** прямую **HK** до пересѣченія **K** съ продолженною стороною **GB**. Соединивъ точки **E** и **K** прямою **EK**, вы получите треугольникъ **EGK**, равномѣрный четыреугольнику **BHEG**, потому-что въ этихъ двухъ площадяхъ общая часть **EBG** и части **EBK** и **EBH** равномѣрны (§ 131). Такъ какъ площади **BHEG** и **ABCDEF** равны и также площади **BHEG** и **EGK** равны, то непремѣнно треугольникъ **EGK** равномѣренъ шестиугольнику **ABCDEF**.

§ 138. Раздѣленіе треугольника на равныя части.

1) Раздѣлить треугольникъ ABC (*фиг. 149*) *на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ вершину C.*

Раздѣлите на четыре равныя части **AH, HG, GK, KB** сторону **AB**, противолежащую вершинѣ **C**, и эту вершину соедините съ точками **H**, **G**, **K** — получите четыре равномѣрные треугольника **ACH, HCG, GCK, BCK** (у нихъ основанія равны и одна и та-же высота). Треугольникъ **ACH** составляетъ четвертую часть треугольника **ABC**, потому-что въ этихъ треугольникахъ высоты равны и основаніе **AH** равно одной четверти основанія **AB**. Такъ какъ треугольники **ACH**, **HCG**, **GCK** и **BCK** равномѣрны, то каждый изъ нихъ есть четверть треугольника **ABC**.

фиг. 149.



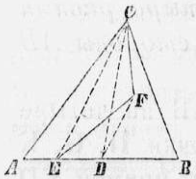
2) Раздѣлить треугольникъ ABC на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ точку D стороны AB (фиг. 149).

Въ точкахъ **H**, **G**, **K** раздѣлите сторону **AB** на четыре равныя части и проведите прямую **CD**. Чрезъ точки **H**, **G**, **K** проведите прямыя **HF**, **GE**, **KN** параллельно къ прямой **CD** до пересѣченія съ сторонами **AC** и **BC**. Наконецъ соединивъ точку **D** съ точками **F**, **E**, **N**, вы раздѣлите треугольникъ **ABC** на четыре равныя части.

Вы уже знаете, что каждый изъ треугольниковъ **AHC**, GHC, GKC и BKC есть четверь треугольника ABC; но треугольникъ AHC равномѣренъ треугольнику ADF, потому-что у нихъ общая часть AHF и равномѣрныя части HFC и HFD (треугольники HFC и HFD имѣютъ общее основаніе HF, и ихъ вершины C и D находятся на прямой, параллельной къ этому основанію); слѣдовательно треугольникъ ADF есть четверть треугольника ABC. Треугольникъ ACG равенъ половинѣ треугольника ABC; но треугольникъ ACG равномѣренъ треугольнику ADE, потому-что у нихъ общая часть AEG и ихъ части CEG и DEG равномѣрны (общее основаніе EG и вершины C и D находятся на прямой, параллельной къ этому основанію); слѣдовательно треугольникъ ADE равенъ половинѣ треугольника ABC. Такъ какъ треуг. ADF $= {}^1/_4$ треугольника ABC и треуг. ADE $= {}^1/_2$ треугольника ABC, то понятно, что треуг. DEF есть $^1/_4$ треугольника ABC. Треугольникъ BDN равномѣренъ треугольнику CBK, потому-что у нихъ общая часть BKN, и ихъ части DKN и CKN равномѣрны (общее основаніе KN и вершины D и C находятся на прямой, параллельной къ этому основанію). Такъ какъ треуг. CBK есть $^1/_4$ треугольника ABC, то и треуг. BDN есть $^1/_4$ треугольника ABC. Итакъ вы узнали, что треугольники ADF, DEF и BDN вмѣстѣ составляютъ $^3/_4$ треугольника ABC; слѣдовательно четыреугольникъ DECN непремѣнно равенъ $^1/_4$ треугольника ABC.

3) *Раздѣлить треугольникъ ABC (фиг. 150) на двѣ равныя части прямыми, проходящими чрезъ точку F, находящуюся внутри треугольника.*

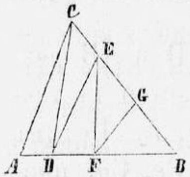
фиг. 150.



Раздѣлите сторону AB въ точкѣ D пополамъ и проведите прямую DF. Соедините вершину C съ точками F и D, и чрезъ C проведите прямую CE параллельно къ FD. Наконецъ соедините точки F и E — получится линія CFE, раздѣляющая треугольникъ ABC на двѣ равныя части. Чтобы объяснить вѣрность этого рѣшенія, разсмотрите четыреугольникъ ACFE и треугольникъ ACD. Въ этихъ двухъ фигурахъ часть ACE общая, и части FCE и DCE равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе CE, и ихъ вершины F и D находятся на прямой, параллельной къ этому основанію. Откуда вы заключаете, что площади ACFE и ACD равны; но треугольникъ ACD есть $^1/_2$ треугольника ABC, стало быть четыреугольникъ ACFE $= {}^1/_2$ треугольника ABC.

4) *Раздѣлить треугольникъ ABC (фиг. 151) на пять равныхъ частей прямыми, проведенными между сторонами AB и BC.*

фиг. 151.

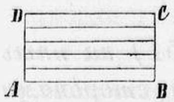


Раздѣлите сторону AB на пять равныхъ частей такъ, чтобы часть AD равнялась $^1/_5$ стороны AB. Соединивъ точки C и D, вы получите треугольникъ ACD, равный $^1/_5$ треугольника ABC (почему?); слѣдовательно треугольникъ BCD равенъ $^4/_5$ треугольника ABC. Раздѣлите сторону BC на четыре равныя части такъ, чтобы CE равнялось $^1/_4$ стороны BC, и соедините точки E и D — получится треугольникъ CDE, равный $^1/_4$ треугольника BCD (почему?). Такъ какъ треуг. BCD равенъ $^4/_5$ треугольника ABC и треуг. CDE равенъ четвертой долѣ четырехъ-пятыхъ треугольника ABC, то треуг. CDE равенъ $^1/_5$ треугольника ABC, четыреугольникъ ACED $= {}^2/_5$ треуг. ABC и треуг. BED $= {}^3/_5$ треуг. ABC. Раздѣлите сторону DB на три равныя части такъ, чтобы часть DF равнялась $^1/_3$ прямой DB, и соедините точки E и F; получится треуг. DEF, равный $^1/_3$ треугольника BDE или равный $^1/_3$ трехъ-пятыхъ треугольника ABC; слѣдовательно треуг. DEF $= {}^1/_5$ треуг. ABC и треуг. BEF $= {}^2/_5$ треугольника ABC. Раздѣлите прямую BE въ точкѣ G пополамъ и проведите прямую GF; получится треугольникъ EFG, равный $^1/_2$ треугольника BEF, или равный $^1/_2$ двухъ-пятыхъ треугольника ABC; слѣдовательно каждый изъ треугольниковъ EFG и BFG равенъ $^1/_5$ треугольника ABC.

§ 139. Раздѣленіе многоугольниковъ на равныя части.

1) Раздѣлить прямоугольникъ ABCD (фиг. 152) на пять равныхъ частей прямыми, параллельными къ основанію.

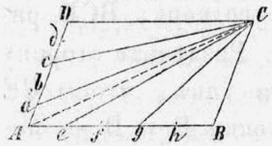
фиг. 152.



Раздѣлите высоту AD на пять равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведите прямыя параллельно къ основанію; тогда образуются равные между собою прямоугольники, изъ которыхъ каждый есть пятая часть прямоугольника ABCD.

2) Раздѣлить параллелограмъ ABCD (фиг. 153) на пять равныхъ частей прямыми, проходящими чрезъ вершину C.

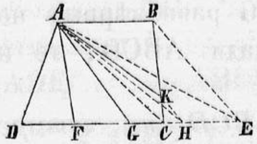
фиг. 153.



Каждую изъ сторонъ AD и AB раздѣлите на пять равныхъ частей въ точкахъ *a*, *b*, *c*, *d* и *e*, *f*, *g*, *h*. Потомъ проведите прямыя C*c*, C*a*, C*e*, C*g*, пропуская точки *d*, *b*, A, *f*, *h*; каждая изъ образовавшихся частей BC*g*, C*eg*, A*a*C*e*, C*ac*, CD*c* есть пятая часть параллелограма ABCD. Въ самомъ дѣлѣ, проведя діагональ AC, вы получите два равные треугольника ABC и ACD. Каждый изъ треугольниковъ BC*g* и C*eg* составляетъ $^2/_5$ треугольника ABC, который равенъ $^1/_2$ параллелограма ABCD; слѣдовательно каждый изъ этихъ треугольниковъ равенъ $^1/_5$ параллелограма ABCD. Каждый изъ треугольниковъ CD*c* и *ac*C составляетъ $^2/_5$ треугольника ACD, который равенъ $^1/_2$ параллелограма ABCD; стало быть каждый изъ этихъ треугольниковъ составляетъ $^1/_5$ параллелограма ABCD. Итакъ треугольники BC*g*, C*eg*, CD*c* и *ac*C вмѣстѣ составляютъ $^4/_5$ параллелограма ABCD; слѣдовательно четыреугольникъ A*a*C*e* равенъ пятой части параллелограма.

3) Раздѣлить трапецію ABCD (фиг. 154) на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ вершину A.

фиг. 154.



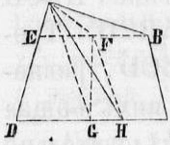
Проведите діагональ AC и къ ней параллельно прямую BE чрезъ вершину B до пересѣченія E съ продолженною стороною DC. Раздѣлите прямую DE въ точкахъ F, G, H на четыре равныя части и проведите прямыя FA и GA. Чрезъ точку H проведя прямую HK параллельно къ діагонали AC, соедините точки K и A прямою KA. Прямыми AF, AG, AK трапеція раздѣлится на четыре равныя части.

Чтобы объяснить вѣрность этого рѣшенія, проведите прямыя AE и AH. Образовавшійся треугольникъ ADE равномѣренъ трапеціи ABCD, потому-что эти фигуры содержатъ общую часть ADC и равномѣрныя части ACE и ACB (въ этихъ треугольникахъ общее основаніе AC и вершины E и B, лежащія на прямой, параллельной къ этому основанію). Каждый изъ треугольниковъ ADF и AFG равенъ $^1/_4$ треугольника ADE и эти треугольники находятся въ общей части треугольника ADE и трапеціи ABCD; слѣдовательно каждый изъ этихъ треугольниковъ есть $^1/_4$ трапеціи ABCD. Треугольникъ AGH, составляющій $^1/_4$ треугольника ADE, равномѣренъ четыреугольнику AGCK, потому-что въ этихъ фигурахъ общая часть AGC и части ACH и ACK равномѣрны (въ этихъ треугольникахъ общее основаніе AC, и вершины H и K, находящіяся на прямой, параллельной къ этому основанію. Откуда вы заключаете, что четыреугольникъ AGCK $=$ $^1/_4$ трапеціи ABCD, четыреугольникъ ADCK $=$ $^3/_4$ трапеціи ABCD и треугольникъ ABK $=$ $^1/_4$ трапеціи ABCD.

4) *Раздѣлить четыреугольникъ ABCD на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ вершину A* (фиг. 155).

Проведя прямую BE параллельно къ сторонѣ CD, вы раздѣлите каждую изъ этихъ прямыхъ въ точкахъ F и G на двѣ равныя части. Потомъ проведите прямыя AF, FG, AG и чрезъ точку F прямую FH параллельно къ AG. Наконецъ соедините точки A и H прямою AH — получите равныя площади ADH и ABCH. Въ самомъ

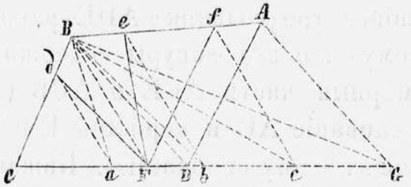
фиг. 155.



дѣлѣ, площади AFGD и ADH равны, потому-что въ нихъ общая часть ADG, и части AFG и AHG равномѣрны; но такъ какъ площадь AFGD есть $^1/_2$ площади ABCD, то и ADH $= {}^1/_2$ ABCD и ABCH $= {}^1/_2$ ABCD.

5) *Раздѣлить четыреугольникъ ABCD на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ точку F* (фиг. 156).

фиг. 156.

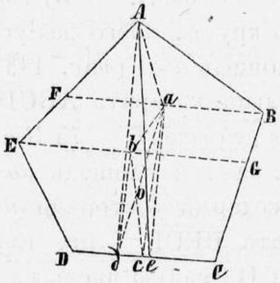


Проведите діагональ BD и къ ней параллельно прямую AG чрезъ вершину A до пересѣченія G съ продолженною стороною CD. Потомъ раздѣлите прямую CG на четыре равныя части въ точкахъ *a*, *b*, *c* и соедините точки B и F. Наконецъ чрезъ точки *a*, *b*, *c* проведите прямыя *ad*, *be*, *cf* параллельно къ BF и соедините точку F съ точками *d*, *e*, *f* прямыми F*d*, F*e*, F*f*, которыя раздѣляютъ четыреугольникъ ABCD на четыре равныя части.

Чтобы объяснить вѣрность этого рѣшенія, проведите прямыя B*a*, B*b*, B*c*; тогда каждый изъ образовавшихся треугольниковъ BC*a*, B*ab*, B*bc*, BG*c* равенъ $^1/_4$ треугольника BCG или равенъ $^1/_4$ площади ABCD, потому-что площади BCG и ABCD равны (въ нихъ общая часть BCD и равномѣрныя части BDG и BDA). Треугольникъ FC*d* равномѣренъ треугольнику BC*a*, потому-что въ нихъ общая часть C*ad* и равномѣрныя части *ad*F и *ad*B; слѣдовательно треуг. FC*d* $= {}^1/_4$ четыреугольника ABCD. Треугольникъ BC*b*, равный $^1/_2$ четыреугольника ABCD, равномѣренъ четыреугольнику BCF*e*, потому-что фигуры BC*b* и BCF*e* содержатъ общую часть BCF и равномѣрныя части BF*b* и BF*e*; слѣдовательно четыреугольникъ BCF*e* $= {}^1/_2$ четыреугольника ABCD и четыреугольникъ B*e*F*d* $= {}^1/_4$ четыреугольника ABCD. Треугольникъ BC*c*, равный $^3/_4$ четыреугольника ABCD, равномѣренъ четыреугольнику BCF*f*, потому-что въ нихъ общая часть BCF и равномѣрныя части BF*c* и BF*f*; слѣдовательно четыреугольникъ BCF*f* $= {}^3/_4$ четыреугольника ABCD и треугольникъ F*ef* $= {}^1/_4$ четыреугольника ABCD. Такъ какъ четыреугольникъ BCF*f* $= {}^3/_4$ ABCD, то непремѣнно четыреугольникъ ADF*f* $= {}^1/_4$ ABCD.

§ 140. *Раздѣлить многоугольникъ ABCDE на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ вершину A* (фиг. 157).

фиг. 157.



Чрезъ вершины E и B проведите прямыя EG и BF параллельно къ сторонѣ DC. Каждую изъ прямыхъ FB, EG и DC раздѣлите на двѣ равныя части въ точкахъ *a*, *b* и *c*, и проведите прямыя A*a*, *ab*, *bc*, *ac*. Чрезъ точку *b* проведите прямую *bd* параллельно къ *ac* и соедините прямыми: A*d* точки A и *d*, *ad* точки *a* и *d*. Наконецъ чрезъ *a* проведите прямую *ae* параллельно къ A*d* и соедините точки A и *e* прямою A*e*.

Вѣрно-ли это рѣшеніе? — Многоугольникъ ABC*cba* равномѣренъ многоугольнику ABC*da*, потому-что у нихъ общая часть ABC*ca* и равномѣрныя части *acb* и *acd* (съ общимъ основаніемъ *ac* и вершинами *b* и *d*, находящимися на прямой, параллельной къ этому основанію). Такъ какъ многоугольникъ ABC*cba* есть половина многоугольника ABCDE, то и многоугольникъ ABC*da* составляетъ половину многоугольника ABCDE. Многоугольникъ ABC*da* равномѣренъ четыреугольнику ABC*e*, потому-что у нихъ общая часть ABC*ea* и равномѣрныя части *aed* и *ae*A (съ общимъ основаніемъ *ae* и вершинами, находящимися на прямой *d*A, параллельной къ этому основанію); слѣдовательно четыреугольникъ ABC*e* составляетъ половину многоугольника ABCDE и прямая A*e* вполнѣ замѣняетъ ломанную линію A*abc*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Гипотенуза AC прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 131) равна 44 саж. и катетъ BC равенъ 8 саж. — Найти площадь этого треугольника. — *(Почти 172 квад. саж.)*. — 2) Гипотенуза равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника равна 84 саж.; сколько сажень содержитъ каждый изъ катетовъ? *($59^3/_7$ саж.)*—3) Сторона AB квадрата ABCD (ф. 131) равна 14 саж.; сколько сажень содержитъ діагональ AC? — *(Почти 19 саж.)*. — 4) Вычислить высоту равносторонняго треугольника, коего периметръ содержитъ 105 саж. — *(Почти 30 саж.)*. — 5) Вычислить сторону квадрата, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ равенъ $7^1/_2$ ар. — *($10^1/_2$ ар.)*. — 6) Площадь *abcd* (фиг. 133), содержащая 2500 квад. саж., вчетверо больше квадрата ABCD; сколько сажень содержитъ сторона AB? — *(25 саж.)*. — 7) Квадратъ *acon* (фиг. 135) содержитъ 289 квад. саж. и площадь *abcd* въ девять разъ больше; сколько сажень содержитъ сторона *ab*? — *(51 саж.)*. — 8) Сторона BE квадрата BECF (фиг. 136) составляетъ $^3/_4$ стороны AD квадрата ABCD; какую часть площади ABCD составляетъ квадратъ BECF? — 9) Площадь трапеціи ABCD (фиг. 140) содержитъ 1248 квад. саж., сторона AD=58 саж. и сторона BC=46 саж.; сколько сажень содержитъ высота треугольника CDE, равномѣрнаго трапеціи ABCD? — *(24 саж.)*. — 10) Треугольникъ ABC (фиг. 139), равномѣрный прямоугольнику ADEF, содержитъ 3552 квадр. саж.; сколько сажень въ основаніяхъ AC и AF, когда высота содержитъ 37 саж.? — *(AC=192 саж., AF=96 саж.)*. — 11) Начерчены два равномѣрные треугольника ABC и BCD (фиг. 141), въ которыхъ BC = 72 саж. и CD = 64 саж. Найти площадь ABC, когда извѣстно, что треугольникъ BCD равнобедренный. — *(1908 квад. саж.)*. — 12) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 142) основаніе BC равно 38 саж. и высота равна 42 саж.; въ треугольникѣ BED, равномѣрномъ треугольнику ABC, основаніе BD 18-ю саженями больше основанія BC; на сколько высота EF меньше AG? — *(На $13^1/_2$ саж.)*. — 13) По правилу (§ 135) начерченъ прямоугольникъ DFGH (фиг. 146) равномѣрный прямоугольнику ABCD, который содержитъ 1404 квад. саж.; сколько сажень содержитъ прямая GF, когда прямая LM равна 36 саж.? — *(39 с.)*. — 14) По правилу (§ 136) начерченъ параллелограмъ DFGH (ф. 147), равномѣрный параллелограму ABCD, коего основаніе AB содержитъ 47 саж. и высота B*a* равна 24 саж.; сколько сажень содержитъ основаніе HD, когда высота *ab* равна 83 саж.? — *($13^{49}/_{83}$ саж.)*.— 15) Начертить квадратъ, равномѣрный трапеціи (ф. 122), въ которой сторона AB=82 саж., сторона DC=54 саж. и высота равна 42 саж.; сколько сажень должна содержать сторона квадрата? — *(Почти 53 саж.)*. — 16) Площадь квадрата HKLM (фиг. 132), содержащая 93 саж., втрое больше площади квадрата ABCD; сколько сажень содержитъ діагональ AC? — *(55 футовъ)*. — 17) Площадь прямоугольника ABCD (фиг. 69) содержитъ 3600 квад. саж. и основаніе AB=75 саж.; сколько сажень содержитъ діагональ AC? — *(89 саж.)* — 18) Въ прямоугольникѣ ABGD (фиг. 69) діагональ AC = $3^1/_2$ саж. и основаніе AB = $2^3/_4$ саж.; сколько квадратныхъ сажень въ площади этого прямоугольника? — *($5^{27}/_{32}$ кв. саж.)*— 19) Въ трапеціи ABCD (ф. 122) сторона AB=54 саж., BC=32 саж., DC = 45 саж. и AD=32 саж.; сколько квадратныхъ сажень въ площади этой трапеціи? — *($1559^1/_4$ квад. саж.)* — 20) Площадь трапеціи равна 16120 квад. саж., сторона AB = 186 саж. (фиг. 122) и высота равна 124 саж.; сколько сажень въ сторонѣ DC? — *(74 саж.)*. — 21) Периметръ трапеціи ABCD (фиг. 122) равенъ 122 саж., сторона BC = 32 саж., AD =46 саж. и высота равна 30 саж.; сколько квадратныхъ сажень содержитъ площадь этой трапеціи? — *(660 квад. саж.)* — 22) Отъ параллелограма ABCD (фиг. *120*), коего основаніе AB =26 саж. и высота равна 16 саж., отрѣзать параллелограмъ въ 140 квад. саж. прямою, параллельною къ сторонѣ AB; сколько сажень должна содержать высота отдѣляемаго параллелограма? — *($5^5/_{13}$ саж.)*. — 23) Отъ треугольника ABC, коего основаніе равно 18 саж. и высота 15 саж., отрѣзать треугольникъ 45 квадр. саж. прямою, параллельною къ основанію; сколько сажень должны содержать высота и основаніе отдѣляемаго треугольника? — *(Высота = $8^1/_2$ саж. и основаніе = $10^{10}/_{17}$ саж.)*. — 24) Треугольникъ ABC (фиг. 149), коего основаніе AC=32 саж. и высота равна $17^1/_4$ саж., раздѣлить на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ точку D; на сколько сажень отъ точки A прямая раздѣла пересѣчетъ основаніе AC, когда извѣстно,

что точка D отстоитъ отъ этого основанія на $12^{1}/_{2}$ саж.? — *(На $22^{2}/_{5}$ саж.).* — 25) Начертить квадратъ *abcd* (фиг. 133), составляющій $^{3}/_{8}$ квадрата ABCD, и еще квадратъ *efgh*, коего сторона составляетъ $^{3}/_{8}$ стороны AB; на сколько площадь *abcd* больше или меньше площади *efgh*, когда извѣстно, что квадратъ ABCD содержитъ 4096 квадр. саж.? — *(abcd больше efgh на 960 квад. саж.).* — 26) Начерчены три квадрата ABCD, *abcd* и *efgh*; площадь ABCD въ пять разъ больше площади *abcd*, сторона AB въ пять разъ больше стороны *ef* и площадь *efgh* содержитъ $272^{1}/_{4}$ квад. саж.; сколько сажень содержитъ сторона *ab*? — *($36^{3}/_{4}$ сажени).*

ОТДѢЛЪ VII.

Задачи, относящіяся къ предъидущимъ отдѣламъ.

1) Въ натурѣ разстояніе AB между двумя точками A и B равно 245 саж.; сколько дюймовъ содержитъ изображеніе *ab* этой прямой, когда извѣстно, что оно отложено по масштабу 50 сажень въ дюймѣ? — *(§ 62. Отв. $4^{9}/_{10}$ дюйма).*

2) Художникъ желаетъ снять копію[1] съ картины, длина которой 2 аршина и высота $1^{1}/_{2}$ аршина. Какой ширины должна быть копія, когда ея длина равна 6 вершкамъ? — *(§ 55. Отв. $4^{1}/_{2}$ вершка).*

3) Чертежнику заказана копія съ чертежа, длина котораго 23 дюйма и ширина 15 дюймовъ. Чертежъ составленъ по масштабу 3 сажень въ дюймѣ, длина копіи должна быть $6^{9}/_{10}$ дюйма и ея ширина $4^{1}/_{2}$ дюйма. Сколькимъ саженямъ долженъ соотвѣтствовать дюймъ масштаба копіи? — *(§§ 55 и 62. Отв. 10 саженямъ).*

---

[1] *Копія* — снимокъ съ чего-либо.

4) Планъ[2]), составленный по масштабу 100 сажень въ дюймѣ, требуется уменьшить въ $2^{1}/_{2}$ раза; сколько саженей должно принять въ дюймѣ масштаба для этого уменьшеннаго плана? — *(§ 62).*

5) Требуется гравировать картину, длина которой аршинъ и ширина 12 вершковъ; а длина гравюры должна быть 3 вершка; на картинѣ нарисовано дерево, вышиною въ 7 вершковъ. Сколько вершковъ должно содержать это дерево на гравюрѣ? — *(Отв. $1^{5}/_{16}$ вершка).*

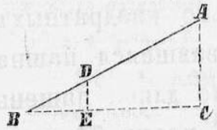
6) Планъ **abcd** (фиг. 135) раздѣленъ прямыми **eg**, **km**, **np** и **hf** на девять равныхъ квадратиковъ; каждый изъ этихъ квадратиковъ долженъ быть перерисованъ на листѣ одного формата съ квадратомъ **abcd**. Во сколько разъ должно увеличить линіи, нарисованныя на планѣ **abcd**, для перенесенія на отдѣльные листы? — *(§ 127).*

7) За окраску 8 дверей, высотою въ $9^{1}/_{2}$ футъ и шириною въ 7 футъ, заплачено 6 рублей 80 копѣекъ; во сколько обошелся квадратный футъ? — *(§ 96. Отв. Въ $1^{37}/_{133}$ копѣйки).*

8) Въ трехъ комнатахъ выбѣлены потолки за 4 рубля 25 копѣекъ. Ширина комнатъ 6 аршинъ, длина первой комнаты 8 аршинъ, второй $6^{1}/_{2}$ аршинъ, третьей $6^{3}/_{4}$ аршина. Во сколько обошлась выбѣлка квадратнаго аршина потолка? — *(Отв. Въ $3^{1}/_{3}$ копѣйки).*

9) Но скату горы построена шоссейная дорога AB (фиг. 158), наивысшая точка A которой находится на 23 сажени надъ горизонтомъ BC; длина AB дороги 2 версты 242 сажени; сколько паденія имѣетъ эта дорога на 10 сажень ея длины, т. е. какой длины должна быть вертикальная прямая DE, соотвѣтствующая длинѣ BD въ 10 сажень? — *(1 футъ $3^{1}/_{2}$ дюйма (почти).*

фиг. 158.



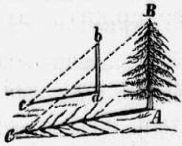
---

[1]) *Планъ* — изображеніе мѣстности со всѣми на ней находящимися предметами, уменьшенными противъ натуральнаго въ извѣстное число разъ.

10) Извѣстно, что высота AC (фиг. 158) горы равна 14 саженямъ и разстояніе AB отъ вершины A до подошвы B равно 231 саж.; на сколько точка D ниже вершины A, когда извѣстно, что разстояніе BD равно $57^3/_4$ саж.? — *(На $10^1/_2$ саженъ).*

11) Чтобы опредѣлить высоту AB дерева (фиг. 159), измѣрена длина AC его падающей тѣни, высота *ab* вертикально поставленнаго кола и длина *ac* его падающей тѣни, и найдено AC = 4 саж., *ab* = 2 ар. и *ac* = $3^1/_2$ ар.; сколько аршинъ въ высотѣ AB? — *($6^6/_7$ ар.).*

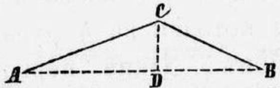
фиг. 159.



12) Требуется составить полъ, длиною въ $9^1/_2$ ар. и шириною въ $7^3/_4$ ар., изъ квадратиковъ краснаго и дубоваго дерева, расположенныхъ въ шахматномъ порядкѣ. Сколько потребно такихъ квадратиковъ, шириною каждый квадратикъ въ 4 вершка? — *(1178 квадратиковъ).*

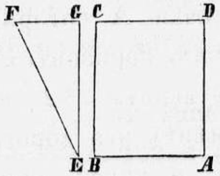
13) Для желѣзной дороги требуется прорыть гору по направленію отъ A до B (фиг. 160). Зная, что въ этомъ мѣстѣ высота CD горы равна 18 саж. и что разстояніе AC = 95 саж. и BC = 63 саж., опредѣлить горизонтальное разстояніе AB. — *(Почти 154 саж.).*

фиг. 160.



14) Двѣ пашни ABCD и EFG, между которыми проложена дорога, шириною въ $3^1/_2$ саж. (фиг. 161), требуется соединить въ одну пашню, уничтожая дорогу. Сколько квадратныхъ саженъ содержитъ образовавшаяся пашня ADFE, когда извѣстно, что длина пашенъ 235 саженъ, ширина DC равна 74 саж. и ширина FG равна 68 саж. — *(10 десятинъ $2202^1/_2$ квад. саж.).*

фиг. 161.



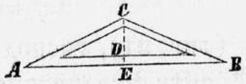
15) Прямоугольное поле, длиною въ 67 саж. и шириною въ 43 саж., требуется обвести канавкою, шириною въ 2 ар.; на сколько уменьшится количество земли поля? — *(На 144 квад. саж. 8 квад. ар.).*

16) Сколько потребно булыжнаго камня на мощеніе улицы, длиною въ 354 саж. и шириною въ $12^3/_4$ саж., когда на квадратную сажень полагается $^1/_9$ кубическ. сажени камня? — *($501^1/_2$ куб. саж. камня).*

17) Извѣстно, что какой-нибудь предметъ представляется тѣмъ больше, чѣмъ больше глазъ къ нему приближается, и на оборотъ: тотъ-же самый предметъ кажется тѣмъ меньше, чѣмъ больше глазъ отъ него удаляется. Высота дерева представляется глазу A (фиг. 83) прямою НЕ при разстояніи, равномъ прямой *m*. Найти прямую, которою представляется высота того-же самаго дерева при разстояніи глаза отъ него, равномъ прямой *n*. — *(§ 63).*

18) По ширинѣ дома въ 13 аршинъ (фиг. 162) требуется построить стропила такъ, чтобы, наибольшая высота подъ крышею равнялась $5^1/_2$ ар. Опредѣлить длину AC стропильныхъ ногъ, толщина которыхъ 5 вершковъ, когда толщина лежни AB = $6^1/_2$ вершкамъ. — *(Почти 9 ар.).*

фиг. 162.

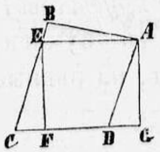


19) Съ обѣихъ сторонъ требуется обить желѣзными листами три двери амбара, высота которыхъ 5 аршинъ; ширина первой двери 4 аршина, второй и третьей по $2^1/_2$ ар. Сколько потребно желѣзныхъ листовъ, длиною въ 2 аршина и шириною въ аршинъ? — *(45 желѣзныхъ листовъ).*

20) Требуется построить полукруглое окно, діаметромъ въ $2^1/_2$ аршина. Вычислить длину дуги этого окна. — *(3 ар. $14^4/_5$ вершк.).*

21) У помѣщика садъ ABCD (фиг. 163), содержащій 3600 квадр. саженъ. Чтобы этому саду дать правильную фигуру, помѣщикъ провелъ прямыя AG и EF перпендикулярно къ CD, прямую AE параллельно къ CD и измѣрилъ разстоянія DC = 73 саж., GD = 13 саж., CF = 38 саж. и AG = 53 саж. На сколько уменьшилась площадь сада? — *(На 1056 квад. саж.).*

фиг. 163.



*

22) Чрезъ прямоугольную пашню ABCD, длина которой 237 саж. и ширина 148 саж., проложена дорога, шириною въ 2 саж., параллельно къ длинѣ пашни. Сколько земли находится подъ пашнею? — *(14 десят. 1002 квад. саж.)*.

23) Для желѣзнаго котла, коего дно есть кругъ и верхній край окружность круга, требуется приготовить крышку. Вычислить радіусъ крышки, когда извѣстно, что длина верхняго края котла равна 13 фут. 1 дюйму. — *(25 дюймовъ)*.

24) Пашню ABCD (фиг. 123) требуется засѣять овсомъ. Извѣстно, что діагональ AC равна 240 саж., перпендикуляръ BE содержитъ 85 саж. и перпендикуляръ DF равенъ 67 саж. Сколько четвертей овса потребно для посѣва этой пашни, когда на десятину полагается по 18 четвериковъ овса? — *($17^{1}/_{10}$ четверти)*.

25) На планѣ изображены церковь A (фиг. 91), господскій домъ E и начало B села. Требуется найти квадратное содержаніе земли, заключающееся въ прямоугольномъ треугольникѣ AEB, когда извѣстно, что разстояніе AE = 171 саж. и AB = 221 саж. — *(4 десятины 2370 квад. саж.)*.

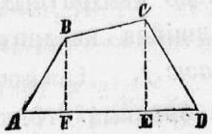
26) На обшивку квадратной сажени бревенчатой стѣны полагается по 4 доски, длиною въ 3 сажени, и на прибивку каждой доски по 12 гвоздей. Сколько потребно досокъ и гвоздей на обшивку фронтона [1]), коего основаніе содержитъ $20^{1}/_{4}$ ар. и высота равна 4 ар.? — *(18 досокъ и 216 гвоздей)*.

27) Сколько кружковъ, радіусы которыхъ $1^{1}/_{2}$ фута, можно вырѣзать изъ прямоугольнаго деревяннаго щита, длиною въ $10^{3}/_{4}$ фута и шириною въ $6^{1}/_{2}$ футъ? — *(6 кружковъ)*.

28) Переплетчикъ желаетъ разрѣзать листъ бумаги, длиною въ 27 дюймовъ и шириною въ 25 дюймовъ, на равныя прямоугольныя части; длина каждой части должна быть $6^{1}/_{4}$ дюйма и ширина $4^{1}/_{2}$ дюйма. Сколько получится такихъ частей? — *(24 части)*.

29) Сколько пшеницы получится съ пашни ABCD (фиг. 164), когда извѣстно, что каждая десятина даетъ по 8 четвертей пшеницы, прямая AD = 147 саж., AF = 38 саж., ED = 56 саж., перпендикуляръ BF = 54 саж. и перпендикуляръ CE = 73 саж.? — *($21^{271}/_{600}$ четверти)*.

фиг. 164.

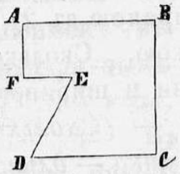


30) На площадь въ квадратный дюймъ атмосферный воздухъ производитъ давленіе, равное вѣсу въ $14^{4}/_{5}$ фунта. Какое давленіе производитъ атмосферный воздухъ на площадь круга, коего радіусъ равенъ $3^{1}/_{2}$ футамъ? — *($2049^{519}/_{1250}$ пуда)*.

31) Для полировки квадратной сажени гранита потребно 12 фунтовъ свинцу и 4 фунта крѣпкой водки. Сколько выйдетъ тѣхъ-же веществъ на полировку 35 плитъ, длиною въ $1^{1}/_{2}$ и шириною въ $1^{1}/_{4}$ аршина каждая плита, и 26 плитъ квадратныхъ, длиною въ 14 вершковъ каждая плита? — *(2 пуда $34^{1}/_{24}$ фунта свинцу и $38^{1}/_{72}$ фунта крѣпкой водки)*.

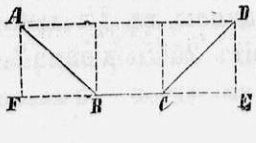
32) У помѣщика лугъ ABCDEF (фиг. 165) засѣянъ травою. Этотъ лугъ имѣетъ слѣдующіе размѣры: AB = 116 саж., BC = 225 саж., CD = 105 саж., EF = 53 саж., AF = 94 саж. и углы EFA, FAB, ABC и BCD прямые. Сколько пудовъ сѣна можно добыть съ этого луга, когда съ десятины получается 250 пудъ? — *($2282^{1}/_{2}$ пуда)*.

фиг. 165.



33) Требуется вырыть ровъ (фиг. 166), глубиною въ $2^{1}/_{2}$ аршина, съ откосами AB и CD, коихъ наклоненіе CE или BF должно быть вдвое больше глубины. Какую ширину AD должно дать этому рву, чтобы пло-

фиг. 166.

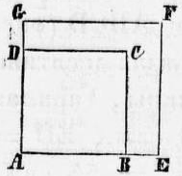


---

[1]) *Фронтонъ* — верхняя треугольная часть стѣны.

щадь ABCD равнялась $17^{1}/_{2}$ квад. ар.? — *(12 аршинъ).*

фиг. 167.



34) Отъ квадратнаго мѣста AEFG (фиг. 167), содержащаго 427 квад. саж. 1 квад. ар., отдѣлена часть BCDGFE для построенія улицы, шириною въ 5 сажень. Сколько квадратныхъ сажень содержитъ образовавшійся квадратъ ABCD? — *($245^{4}/_{9}$ квад. саж.).*

35) Требуется оклеить бумагою дно и боковыя стѣнки четыресторонняго ящика, длина котораго 6 футъ, ширина 4 фута и высота $3^{1}/_{2}$ фута. Сколько листовъ бумаги, длиною въ 18 дюймовъ и шириною въ 16 дюймовъ, пойдетъ на оклейку этого ящика? — *(47 листовъ).*

36) Для стѣнныхъ часовъ заказанъ деревянный ящикъ, лицевая сторона котораго состоитъ изъ четыреугольной рамки; нижняя планка этой рамки должна касаться къ окружности циферблата, а верхняя и боковыя планки должны отстоять отъ циферблата на $1^{1}/_{2}$ дюйма. Какой длины должна быть каждая планка, когда извѣстно, что окружность циферблата содержитъ $27^{1}/_{2}$ дюймовъ и ширина каждой планки $1^{1}/_{4}$ дюйма? — *(Длина верхней и нижней планокъ $11^{1}/_{2}$ дюймовъ, а боковыхъ планокъ $14^{1}/_{4}$ дюйма).*

37) Столяръ долженъ приготовить четыресторонный деревянный ящикъ, длиною въ $3^{3}/_{4}$ аршина, шириною въ $2^{1}/_{4}$ аршина и вышиною въ $1^{1}/_{2}$ аршина, съ крышкою. Сколько онъ долженъ взять досокъ, длиною въ 3 сажени и шириною въ 5 вершковъ, на сдѣланіе этого ящика? — *(Сколько разъ содержится ширина доски въ высотѣ ящика — длина ящика въ длинѣ доски — ширина ящика въ длинѣ доски — ширина доски въ ширинѣ крыши или дна — длина доски въ длинѣ крыши? — $15^{1}/_{2}$ досокъ).*

38) Сколько выйдетъ досокъ, толщиною въ $^{3}/_{4}$ дюйма изъ бревна, окружность котораго содержитъ $25^{9}/_{10}$ дюйма? — *(Почти 11 досокъ).*

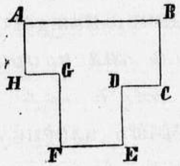
39) Сколько потребно бревенъ на стойки стелажей, окружающихъ каменный домъ, длина котораго 19 саж. 1 ар. и ширина 11 саж. 1 ар., когда разстояніе между стойками 2 саж., а ихъ разстояніе отъ строенія 7 ар.? — *(40 бревенъ).*

40) Наружная окружность чугунной трубы, коей толщина равна $^{3}/_{4}$ дюйма, содержитъ 55 дюймовъ. Сколько дюймовъ содержитъ внутренная окружность трубы? — *($50^{29}/_{100}$ дюйма).*

41) Требуется оклеить обоями комнату, длиною въ 11 аршинъ, шириною въ $8^{3}/_{4}$ аршина и высотою въ $5^{1}/_{2}$ аршинъ; въ этой комнатѣ три окна, высотою въ 3 аршина и шириною въ 2 аршина каждое окно, и четыре двери, высотою въ 4 аршина и шириною въ 3 аршина каждая дверь. Сколько потребно кусковъ обоевъ, длиною въ 12 аршинъ и шириною въ $10^{1}/_{2}$ вершковъ каждый кусокъ? — *(Почти 20 кусковъ).*

42) За 7 рублей 50 копѣекъ продается квадратная сажень мѣста (фиг. 168), въ которомъ AB = 30 саж., BC = 27 саж., CD = 12 саж., DE = 27 саж., EF = 9 саж., FG = 36 саж., GH = 9 саж., AH = 18 саж. и всѣ углы прямые. За сколько продается это мѣсто? — *(За 7290 рублей).*

фиг. 168.



43) Планъ прямоугольнаго участка, составленный по масштабу 50 сажень въ дюймѣ, занимаетъ на бумагѣ 9 дюймовъ въ длину и $6^{1}/_{2}$ дюймовъ въ ширину. Сколько квадратныхъ верстъ заключаетъ въ себѣ снятый участокъ? — *($^{117}/_{200}$ квад. версты).*

44) Въ масштабѣ 100 сажень въ дюймѣ требуется снять прямоугольный участокъ, длиною въ 725 саж. и шириною въ 672 саж. Сколько квадратныхъ дюймовъ занимаетъ планъ этого участка? — *($48^{18}/_{25}$ квад. дюйма).*

45) Изъ бревенъ, толщиною въ 6 вершковъ, сложены стѣны дома, высота котораго 4 саж., длина 10 саж. и ширина 6 саж. Сколько потребно пакли для прокладки по пазамъ, когда на 40 сажень шва выходитъ одинъ пудъ

пакли, а на сажень высоты дома полагается 10 вѣнцовъ? — *(32 пуда)*.

46) Заказано зубчатое колесо, діаметромъ въ 15 футъ, съ 130 зубцами, шириною въ два дюйма каждый зубецъ. Сколько дюймовъ должно содержать разстояніе между зубцами? — *(Почти 2 дюйма $3^{1}/_{2}$ линіи)*.

47) Сколько потребно мелкаго булыжнаго камня на мощеніе откосныхъ береговъ пруда, верхняя длина котораго 28 саж., нижняя длина $26^{1}/_{2}$ саж., верхняя ширина 17 саж., нижняя ширина $15^{1}/_{2}$ саж. и разстояніе между верхними и нижними краями $1^{1}/_{2}$ саж., когда извѣстно, что на 20 квадратныхъ сажень площади полагается одна кубическая сажень булыжнаго камня? — *($6^{21}/_{40}$ куб. саж.)*.

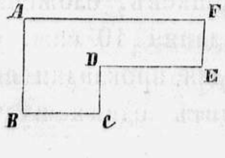
48) Географическая карта большаго размѣра склеена изъ равныхъ прямоугольныхъ листовъ, помѣщенныхъ въ 5 рядахъ по 6 листовъ въ каждомъ ряду; эту карту требуется наклеить на каленкоръ. Какой длины и ширины долженъ быть каленкоръ, когда извѣстно, что длина каждаго листа 20 и ширина 15 дюймовъ? — *(Длина каленкора $4^{2}/_{7}$ ар. и его ширина $2^{19}/_{28}$ ар.)*.

49) Къ доскѣ круглаго стола должно прибить клеенку мѣдными гвоздиками по окружности самой доски. Сколько потребно такихъ гвоздиковъ, когда разстояніе между ними должно быть 4 вершка и діаметръ доски равенъ $3^{1}/_{2}$ аршинамъ? — *(Почти 44 гвоздика)*.

50) На 20 квадратныхъ сажень мостовой полагается кубическая сажень мелкаго булыжнаго камня. Сколько потребно такого-же камня на мощеніе круглаго плаца, имѣющаго въ окружности 44 сажени. — *(§ . — $7^{111}/_{157}$ куб. саж.)*.

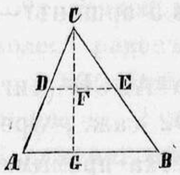
51) Лугъ, изображеный въ видѣ многоугольника (фиг. 169), въ которомъ всѣ углы прямые и AB = 28 саж., BC = 30 саж., DE = 49 саж. и EF = 16 саж., требуется обвести рвомъ, шириною въ $2^{1}/_{4}$ ар. На сколько уменьшится этимъ рвомъ площадь луга? — *(На 158 квад. саж. $2^{1}/_{4}$ квад. ар.)*.

фиг. 169.



52) Помѣщикъ раздѣлилъ поле ABC (фиг. 170) на двѣ части прямою DE, параллельною къ прямой AB. Сколько десятинъ въ треугольникѣ DCE, когда извѣстно, что прямая AB = 360 саж., прямая CG = 250 саж. и прямая FG = 110 саж.? — *(5 десятинъ 2112 квад. саж.)*.

фиг. 170.



53) Къ срединѣ горизонтально положенной лежни, длиною въ 5 саж., прикрѣплена вертикальная стойка, высотою въ $1^{1}/_{2}$ саж. и шириною въ 6 вершковъ; эту стойку требуется подпереть брускомъ, отстоящимъ отъ концевъ стойки и лежни на аршинъ. Какой длины должна быть подпора? — *(7 ар. 3 вершка)*.

54) Деревянный сосудъ, коего круговое дно имѣетъ $^{3}/_{4}$ сажени въ діаметрѣ, требуется обить тремя желѣзными обручами равной длины, шириною въ $1^{3}/_{8}$ дюйма и толщиною въ $^{1}/_{4}$ дюйма каждый обручъ. Сколько вѣсу въ этихъ обручахъ, когда извѣстно, что вѣсъ желѣзной полосы, длиною въ футъ, шириною въ $1^{3}/_{8}$ дюйма и толщиною въ $^{1}/_{4}$ дюйма, равенъ $1^{3}/_{10}$ фунта? — *(Почти $64^{3}/_{10}$ фунта)*.

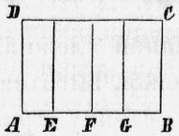
55) Требуется выстлать тротуаръ, шириною въ три плиты и длиною: въ 38 саж. по прямой CD (фиг. 169) и въ 65 саж. по прямой BC. Сколько потребно матеріалу на этотъ тротуаръ, когда сторона плиты равна 15 вершк., на притеску и ущербъ полагается $^{1}/_{20}$ всѣхъ плитъ, на квадратную сажень тротуара потребна $^{1}/_{16}$ куб. сажени песку и $^{1}/_{200}$ куб. сажени извести? — *(1029 плитъ, 6 куб. саж. песку и $^{1}/_{2}$ куб. саж. извести)*.

56) Требуется построить водоливное колесо съ 54 лопатками такимъ образомъ, чтобы разстояніе между ними вмѣстѣ съ толщиною лопатки составило $15^{1}/_{5}$ дюйма. Какой длины долженъ быть діаметръ колеса? — *(21 футъ $9^{2}/_{5}$ дюйма)*.

57) Требуется обвести заборомъ огородное мѣсто (фиг. 64), въ которомъ AB = 21 саж., AF = 25 саж., EF = $11^{1}/_{4}$ саж., DE = $11^{1}/_{2}$ саж., CD = $10^{1}/_{2}$ саж., BC = $12^{3}/_{4}$ саж. Сколько потребно досокъ на обшивку забора, когда на 2 звена полагается 19 досокъ и звено занимаетъ 5 аршинъ? — *($524^{2}/_{5}$ доски)*.

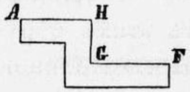
58) Поле, имѣющее видъ прямоугольника ABCD (фиг. 171), высота AD котораго 192 саж., требуется раздѣлить на четыре участка прямыми, параллельными къ сторонѣ AD такимъ образомъ, чтобы участокъ, прилежащій къ прямой AD, содержалъ 9600 квад. саж., второй участокъ 12000, третій 6000 и четвертый 10800. Вычислить разстоянія между прямыми раздѣла. — *(AE = 50 саж., EF = $62^{1}/_{2}$ саж., FG = $31^{1}/_{4}$ саж. и GB = $56^{1}/_{4}$ саж.)*.

Фиг. 171.



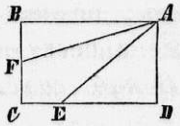
59) Сколько потребно кирпичей для выстилки пола коридора, въ которомъ стѣна AH (фиг. 172), длиною въ 10 аршинъ, перпендикулярна къ стѣнѣ HG, коей длина $6^{1}/_{2}$ аршинъ, и стѣна HG перпендикулярна къ стѣнѣ GF, длина которой $12^{3}/_{4}$ аршина, когда ширина корридора $2^{3}/_{4}$ аршина и на квадратную сажень пола полагается 280 кирпичей? — *(2503 кирпича)*.

Фиг. 172.



60) Трое купили мѣсто ABCD (фиг. 173), длиною въ 90 и шириною въ 60 саж.; первый покупатель заплатилъ 500, второй 600 и третій 400 рублей. Сообразно этимъ суммамъ требуется раздѣлить это мѣсто на три участка прямыми, проходящими чрезъ точку A. Въ какомъ разстояніи отъ точекъ D и B прямыя раздѣла пересѣкутъ стороны DC и BC? — *(DE = 60 саж., BF = 32 саж.)*.

Фиг. 173.



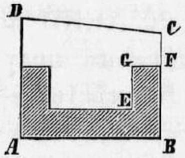
61) Отъ цинковой дощечки ABCD (фиг. 173), длиною въ 10 дюймовъ, шириною въ 8 дюймовъ и вѣсомъ въ $3^{1}/_{8}$ фунта, требуется отрѣзать часть, вѣсомъ въ $1^{1}/_{4}$ фунта, такъ, чтобы прямая раздѣла прошла чрезъ точку A. Въ какомъ разстояніи отъ точки D эта прямая пересѣчетъ сторону DC? — *(DE = 8 дюймамъ)*.

62) При подъемѣ ведра колесо колодца сдѣлало 2 оборота. Какой глубины колодецъ, когда извѣстно, что діаметръ колеса равенъ $1^{3}/_{4}$ аршина? — *(10 аршинъ $15^{21}/_{25}$ вершка)*.

63) Для сдѣланія 9 паркетныхъ щитовъ, длиною и шириною въ 2 аршина, потребны 22 дубовыя доски, длиною въ 2 сажени, шириною въ 5 вершковъ и толщиною въ $^{1}/_{2}$ дюйма. Сколько потребно такихъ-же досокъ для паркетнаго пола круглаго зала, имѣющаго въ окружности $29^{1}/_{3}$ аршина? — *(Почти 42 доски)*.

64) Требуется построить домъ, длиною въ 18 и шириною въ 5 сажень, съ двумя флигелями, шириною въ $4^{1}/_{2}$ сажени и длиною EG въ 12 саж. каждый флигель (фиг. 174). Сколько квадратныхъ сажень содержитъ площадь двора, когда извѣстно, что длина AD = 26 саж. и BC = 21 саж.? — *(225 квад. саж.)*.

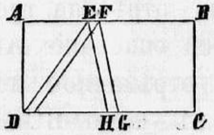
Фиг. 174.



65) Между точками A и C проведена дорога ABC (фиг. 123), часть AB которой содержитъ 215, а часть BC равна 250 саж. Сколько сажень содержитъ прямое разстояніе AC, когда извѣстно, что перпендикуляръ BE, опущенный на прямую AC, равенъ 45 саж.? — *(Почти 456 саж.)*.

66) Отъ прямоугольнаго поля ABCD (фиг. 175), длиною въ 50 и шириною въ 30 сажень, должно отдѣлить 720 квад. саж. прямою, отстоящею отъ точки A на 15 саж. Въ какомъ разстояніи отъ точки D пересѣчетъ прямая раздѣла сторону DC? — *(33 сажени)*.

Фиг. 175.

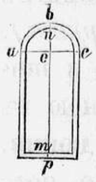


67) У крестьянина пашня ABCDEF (фиг. 168), въ которой AB = 40 саж., DE = 84 саж., EF = $23^{3}/_{4}$ саж., BC = $25^{1}/_{3}$ саж. и всѣ углы прямые. Онъ промѣнялъ эту пашню на поле, имѣющее видъ прямоугольника, ширина котораго 30 саж., но получилъ 198 квад. саженями меньше отдан-

ныхъ, потому-что поле оказалось дороже пашни. Какой длины должно быть поле? — *($93^2/_3$ сажени)*.

68) Изъ брусьевъ, толщиною квадратно въ 4 вершка, заготовлено 28 закладныхъ рамъ (фиг. 176), имѣющихъ въ свѣту 3 аршина высоты и $1^3/_4$ аршина ширины. Сколько потребно войлоковъ на обшивку этихъ рамъ, когда на сажень рамы полагается одинъ войлокъ? — *(Вычислить прямую ac, потомъ полуокружность abc, наконецъ прямую от и край нижняго бруса.— (Почти 94 войлока)*.

фиг. 176.

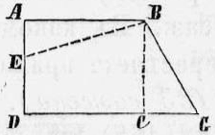


69) Чрезъ прямоугольное поле ABCD (фиг. 175), длиною въ 68 сажень и шириною въ 32 сажени, проложена улица такимъ образомъ, что AE = 16 саж., DH = 28 саж. и EF или HG = 4 саж. Владѣлецъ мѣста продалъ участокъ BCGF по 6 рублей квадратную сажень, участокъ AEHD по 6 рублей 50 копѣекъ и за квадр. сажень улицы онъ получилъ 7 руб. 50 коп. Сколько онъ получилъ за это мѣсто? — *(13600 рублей)*.

70) У помѣщика два поля, коихъ площади равны: квадратное, длиною въ 180 саж. и прямоугольное, длиною въ 480 саж. Помѣщикъ, обведя эти поля канавками, шириною въ $1^1/_2$ аршина, желаетъ узнать, уменьшатся-ли обѣ площади одинаково или нѣтъ. — *(Квадратное поле уменьшится на 359, а прямоугольное поле на $546^1/_2$ квад. саж.)*.

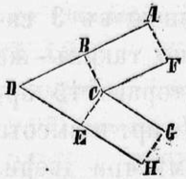
71) Отъ поля ABCD (фиг. 177), длиною въ 116 сажень и шириною въ 84 сажени, отрѣзана треугольная полоса ABE, коей основаніе AE равно 15 саж. Взамѣнъ отрѣзанной полосы должно прибавить къ полю BCDE треугольную полосу BCG, равномѣрную полосѣ ABE. На сколько сажень отъ точки C по продолженію прямой DC должна отстоять точка G? — *(На $20^5/_7$ саж.)*.

фиг. 177.



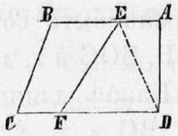
72) Требуется сдѣлать торцовую мостовую ADHGCF (фиг. 178), шириною въ 2 сажени при длинѣ AD = 35 саж., FC = 30 саж., CG = 26 саж. и DH = 31 саж. Сколько потребно бревенъ, длиною въ 3 саж. и толщиною въ 6 вершк., на сдѣланіе торцевъ для этой мостовой, когда извѣстно, что на квадратную сажень мостовой полагается 100 торцевъ и изъ бревна выходитъ 36 торцевъ? — *($338^8/_9$ бревна)*.

фиг. 178.



73) Поле, имѣющее видъ трапеціи ABCD (фиг. 179), въ которой AB = 125 саж., CD = 135 саж., AD = 120 саж. и углы BAD и ADC прямые, требуется раздѣлить на два равные участка такимъ образомъ, чтобы прямая раздѣла прошла чрезъ точку E, отстоящую отъ вершины A на 60 сажень. Въ какомъ разстояніи отъ вершины D прямая раздѣла пересѣчетъ сторону CD? — *(Въ 70 саж.)*.

фиг. 179.

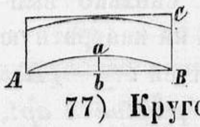


74) Сколько потребно квадратныхъ плитъ, длиною въ $1^1/_4$ фута, для составленія пола, имѣющаго видъ правильнаго шестиугольника съ стороною въ 15 футъ? — *(Сколько футовъ въ прямой OA и въ прямой An. Перпендикуляръ On опредѣлится изъ треугольника OAn. (фиг. 95). 375 плитъ)*.

75) Требуется вымостить дворъ, имѣющій форму правильнаго шестиугольника, сторона котораго содержитъ $6^3/_4$ сажени. Сколько потребно булыжнаго камня на вымощеніе этого двора, когда на квадратную сажень мостовой полагается $^1/_{12}$ кубической сажени камня? — (См. № 74. фиг. 95. — $9^{45}/_{64}$ *кубич. саж.)*.

76) Сколько косяковъ, шириною въ $2^3/_{10}$ дюйма, можно вырѣзать изъ доски, длиною въ 2 сажени и шириною въ 1 футъ, когда дуга AaB (фиг. 180) косяковъ отстоитъ отъ хорды AB на $1^3/_5$ дюйма и длина AB содержитъ 2 фута? — *(28 косяковъ)*.

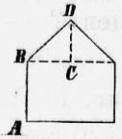
фиг. 180.



77) Круговую платформу, діаметръ которой 24 фута, требуется обить мѣдными листами, квадратно-аршинными. Сколько потребно такихъ листовъ? — *(Почти 84 листа)*.

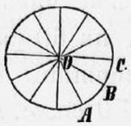
78) На квадратную сажень обшивки дома, за исключеніемъ оконъ и дверей, полагается 4 доски, длиною въ 3 сажени и толщиною въ дюймъ. Сколько потребно такихъ-же досокъ на обшивку дома (фиг. 181), длина котораго 15 аршинъ, ширина 9 ар., высота AB$=7^{1}/_{2}$ ар. и высота DC $=4^{1}/_{4}$ ар., когда въ этомъ домѣ три двери, каждая высотою въ $3^{3}/_{4}$ ар. и шириною въ $2^{1}/_{2}$ ар., и 9 оконъ, каждое окно шириною въ $1^{1}/_{2}$ ар. и высотою въ 2 ар.? — *($152^{1}/_{2}$ доски).*

фиг. 181.



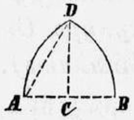
79) Заказанъ круглый столъ, діаметромъ въ $1^{1}/_{2}$ аршина; верхняя доска этого стола должна быть составлена изъ 12 равныхъ частей AOB, BOC и т. д. (фиг. 182) разноцвѣтнаго дерева. Какой длины должна быть каждая изъ дугъ AB, BC и т. д.? *($6^{7}/_{25}$ вершка).*

фиг. 182.



80) Требуется построить готическую арку такимъ образомъ, чтобы дуга AD (фиг. 183) была описана изъ точки B радіусомъ BA, а дуга BD изъ точки A тѣмъ-же радіусомъ AB. Найти высоту CD арки, когда извѣстно, что ея ширина AB$=2^{1}/_{2}$ саж. — *($15^{1}/_{12}$ фута).*

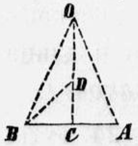
фиг. 183.



81) Колесо, наружный діаметръ котораго равенъ $1^{3}/_{4}$ аршина, должно составить изъ 7 косяковъ, шириною въ 2 вершка. Найти длину наружной и внутренней дуги косяка. *(Наружная дуга $=12^{14}/_{25}$ вершка, внутренняя дуга $=10^{13}/_{17}$ вершка).*

82) Требуется вымостить кирпичемъ полъ башни, имѣющей видъ правильнаго восьмиугольника, сторона котораго равна 4 аршинамъ; сколько выйдетъ кирпичей на этотъ полъ, когда на квадратную сажень его полагается 280 кирпичей? — *(Изъ средины C прямой AB (фиг. 184), равной 4 ар., возставьте перпендикуляръ и на немъ отложите часть CD, равную прямой BC; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ BCD уголъ BDC = 45° (§ 27) и CD = 2 ар.; изъ этого треугольника вы получите BD = 45 вершк. (§ 121). На перпендикулярѣ CO отложите часть DO, равную прямой BD; въ треугольникѣ BDO углы DBO и BOD равны (§ 27) и DBO + BOD = BDC (§ 22) или DBO + BOD = 45°; слѣдовательно BOD = $22^{1}/_{2}$° и AOB = 45°. Такъ какъ уголъ AOB = 45°, то такихъ угловъ вы можете начертить восемь около точки O и получить около точки O восемь равныхъ треугольниковъ, составляющихъ слѣдовательно правильный восьмиугольникъ. Чему равенъ перпендикулкръ CO? — (2396 кирпичей).*

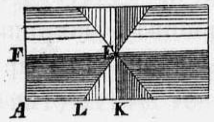
фиг. 184.



83) Вычислить длину дуги свода, радіусъ которой равенъ $5^{1}/_{4}$ ар. и соотвѣтствующій ей центральный уголъ содержитъ 75 градусовъ. — *(6 ар. $13^{9}/_{10}$ вер.).*

84) На сдѣланіе квадратной сажени крыши полагается для трехъ рядовъ 70 драницъ, длиною въ сажень и шириною въ 6 дюймовъ. Сколько потребно драницъ на крышу, состоящую изъ четырехъ равныхъ треугольниковъ и четырехъ равныхъ трапецій, въ которыхъ (фиг. 185) AF $=7^{4}/_{5}$ ар., EF $=11^{1}/_{2}$ ар., AL $=6$ ар., LK $=7^{2}/_{5}$ ар. и EK $=6$ ар.? — *(2814 драницъ).*

фиг. 185.

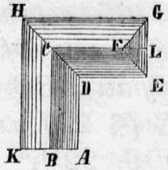


85) Металлическое кольцо, наружный діаметръ котораго 9 дюймовъ и внутренній 7 дюймовъ, должно переплавить въ кружекъ равной толщины съ кольцомъ. Какой радіусъ должно дать глиняной формѣ отливаемаго кружка? — *($2^{4}/_{5}$ дюйма).*

86) Сколько вѣсу въ кольцеобразномъ кускѣ жести, наружный діаметръ котораго равенъ 16 дюймамъ, а внутренній 10 дюймамъ, когда извѣстно, что вѣсъ квадратнаго фута этой жести равенъ 12 фунтамъ? — *($10^{41}/_{200}$ фунта).*

87) Сколько потребно желѣзныхъ листовъ, квадратно-

Фиг. 186.



аршинныхъ, на крышу (фиг. 186), въ которой AD = 15 ар., BC = 21½ ар., KH = 28 ар., CF = 12 ар., GH = 25 ар., EG = 13 ар., AB или FL = 9½ ар., когда извѣстно, что на квадратную сажень крыши полагается 12 листовъ, квадратно-аршинныхъ? — *(1013⅓ листа)*.

88) Экваторъ пересѣкаетъ западный берегъ Африки подъ 26° 30′ и восточный берегъ подъ 61° 25′ восточной долготы. Сколько географическихъ миль по экватору между этими двумя точками, когда извѣстно, что діаметръ экватора содержитъ 1719 географическихъ миль? — *(Почти 523½ географическія мили)*.

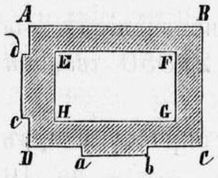
89) Требуется оштукатурить подвальную комнату, въ которой три отвѣсныя стѣны и одна наклонная стѣна; высота отвѣсной прямоугольной стѣны 4½ аршина и ширина 5 аршинъ; въ этой стѣнѣ дверь, высотою въ 3 аршина и шириною въ 2 аршина; высота наклонной прямоугольной стѣны 5 аршинъ 5 вершковъ и ширина 5 аршинъ; ширина отвѣсныхъ стѣнъ, имѣющихъ видъ трапецій, равна 1½ ар. у потолка и 3½ аршина у пола; въ одной изъ этихъ стѣнъ окно, высотою въ 2 аршина и шириною въ 1½ аршина. Сколько извести потребно на штукатурку этой комнаты, когда на квадратную сажень стѣны полагается 1/150 куб. саж. извести? — *(1121/21600 куб. саж. извести)*.

90) Въ колесѣ, коего ступица имѣетъ въ діаметрѣ 3½ вершка, требуется вставить 6 спицъ; наружный діаметръ колеса 2½ аршина и ширина колеса 2½ вершка. Найти разстояніе между спицами на внутренней окружности колеса и на окружности ступицы. — *(На внутренней окружности колеса почти 18⅓ вершка; на ступицѣ почти 1⅚ вершка)*.

91) Для отбѣлки 20 квад. саж. стѣны полагается 3½ пуда бѣлой извѣсти, 2 пуда плавленнаго мѣла и 3 фунта клею. Сколько потребно матеріаловъ на отбѣлку лицевой стороны дома, длина которой 15 саж., высота 8½ ар., когда въ верхнемъ этажѣ 15 оконъ, высотою въ 2½ ар. и шириною въ 1½ ар. каждое окно, въ нижнемъ этажѣ ворота, высотою въ 4 ар. и шириною въ 3½ ар., двѣ двери, высотою въ 4 ар. и шириною въ 2 ар. каждая дверь, и 11 оконъ, высотою въ 2 ар. и шириною въ 1½ ар. каждое окно, и надъ верхнимъ этажемъ фронтонъ, длиною въ 11 саж. и высотою въ 5½ ар.? — *(6 53/60 пуда бѣлой извести, 3 14/15 пуда плавленнаго мѣлу и 5 9/10 фунта клею)*.

92) Изъ плитъ, шириною въ 5 и длиною въ 12 вершковъ, требуется сложить лицевую сторону цоколя[1]), высота котораго должна быть 1½ аршина. Цоколь находится въ двухъ лицевыхъ стѣнахъ AD и DC (фиг. 187) и во внутреннихъ стѣнахъ зданія. Стѣна DC содержитъ 23 сажени съ выступомъ, шириною въ 1 аршинъ, и стѣна AD, содержащая выступъ, шириною въ 1 аршинъ, равна 20 саж.; стѣны EF и GH содержатъ по 14 саж. и стѣны EH и FG по 11⅔ саж. каждая; въ стѣнѣ CD четыре двери, шириною въ 2½ ар. каждая, и ворота, шириною въ 4 ар.; въ стѣнѣ AD дверь, шириною въ 3 ар., въ стѣнѣ HG двѣ двери, шириною каждая въ 2½ ар., и ворота, шириною въ 4 ар., въ стѣнахъ EH и FG по двѣ двери въ каждой стѣнѣ, шириною въ 2½ ар. каждая дверь, и въ стѣнѣ EF восемь воротъ, шириною каждыя въ 4 ар. Сколько потребно плитъ, когда двадцатая часть площади цоколя полагается на швы между плитами? — *(Почти 1332 плиты)*.

Фиг. 187.

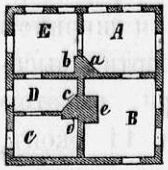


93) Требуется оштукатурить стѣны и потолки комнатъ A, B, C, D и E (фиг. 188), высота которыхъ 4 аршина. Длина комнаты A, въ которой двѣ двери и три окна, 6 ар. и ширина 5 ар.; въ комнатѣ B, длина которой 7 ар. и

---

[1]) *Цоколь* — нижняя часть наружныхъ стѣнъ дома.

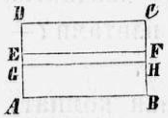
фиг. 188.



ширина 6 ар., три двери и два окна; длина комнаты C, въ которой двѣ двери и одно окно, 6 ар. и ширина 1 ар.; въ комнатѣ D, длина которой 6 ар. и ширина 3 ар., двѣ двери и одно окно; наконецъ комната E, въ которой двѣ двери и два окна, 6 ар. и ширина 5 ар.; высота дверей 3 ар. и ширина $2^{1}/_{2}$ ар., высота оконъ $2^{1}/_{2}$ ар. и ширина 2 ар. Въ этихъ комнатахъ четыре печи, высотою въ 3 ар., и очагъ; печь *a* занимаетъ по $1^{1}/_{2}$ ар. прилегающихъ къ ней стѣнъ, а печь *b* — $1^{1}/_{2}$ ар. одной стѣны и $^{1}/_{4}$ ар. другой стѣны; такія-же печи въ комнатахъ C и D; высота очага $1^{1}/_{2}$, ширина 2 и длина 3 ар. Сколько потребно драницъ, длиною въ сажень, и гвоздей штукатурныхъ, когда на квадратную сажень стѣнъ и потолковъ полагается 40 драницъ и 700 гвоздей съ прибавленіемъ $^{1}/_{10}$ части на изломъ? — *(1660 драницъ и 29050 гвоздей штукатурныхъ)*.

94) Сколько потребно матеріаловъ на окраску половъ въ комнатахъ A, B, C, D и E (фиг. 188), когда на 10 квадратныхъ саженъ пола полагается 25 фунтовъ конопляннаго масла, 10 фунтовъ свѣтлой вохры и 3 фунта стекольной замазки? — *(Вычислить по размѣрамъ предъидущей задачи. — $32^{1}/_{2}$ фунта конопляннаго масла, 13 фунт. свѣтлой вохры и почти 4 фунта стекольной замазки)*.

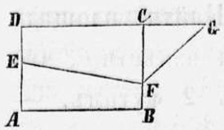
фиг. 189.



95) Прямоугольное поле ABCD (фиг. 189), длиною въ 156 и шириною въ 112 саж., состоитъ изъ двухъ участковъ, между которыми проведена борозда EF параллельно къ AB такъ, что CF = 38 саж. Десятина участка CDEF стоитъ 18 рублей, а десятина участка ABFE оцѣнена въ 10 рублей. На сколько сажень отъ точки F должно перемѣстить борозду, чтобы поле раздѣлилось на два равные по цѣнности участка? — *(FH = $2^{4}/_{5}$ сажени)*.

96) Поле, имѣющее видъ прямоугольника ABCD (фиг. 190), длина котораго 148 сажень и ширина 136 саж., раздѣлено на два участка бороздою, которая по направленію BC отстоитъ отъ точки B на 28 сажень и по направленію DA отъ точки D на 42 сажени. Десятина участка CDEF оцѣнена въ 10 руб. 80 коп., а десятина участка ABFE стоитъ 18 рублей. Требуется придать къ участку CDEF треугольную полосу CFG одинакаго съ нимъ качества земли, чтобы уравнять цѣнность обоихъ участковъ. На сколько сажень отъ точки C по направленію DC должна находиться точка G? — *(CG = $36^{44}/_{81}$ саж.)*.

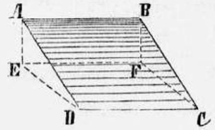
фиг. 190.



97) Земля, вращаясь вокругъ солнца, проходитъ въ одинъ часъ около 14400 миль. Предполагая, что среднее разстояніе между центрами земнаго шара и солнца равно $20^{1}/_{2}$ милліонамъ миль, и что земля совершаетъ путь по окружности круга, узнать градусную величину центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ въ 14400 миль? — *($2' 25''$)*.

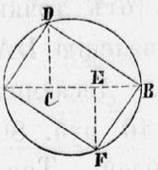
98) На скатѣ горы находится прямоугольное поле ABCD (фиг. 191), коего сторона AB на $21^{1}/_{2}$ саж. выше горизонтальной плоскости CDEF, проходящей чрезъ прямую DC и заключенной между вертикальными плоскостями ABFE, AED и BFC, проведеными чрезъ прямыя AB, AD и BC. Извѣстно, что плоскость ABCD даетъ такое-же количество произрастеній, какое получается съ горизонтальной плоскости CDEF. Сколько квадратныхъ сажень, по количеству произрастеній, должно считать въ полѣ ABCD, въ которомъ прямая AB = 35 саж. и BC = 123 саж.? — *(4235 квад. саж.)*.

фиг. 191.



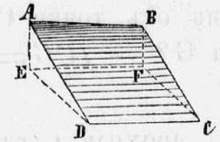
99) Чтобы изъ бревна получить брусъ, выдерживающій наибольшую тяжесть, должно діаметръ AB (фиг. 192) бревна раздѣлить на три равныя части и, возставивъ къ нему перпендикуляры CD и EF, провести хорды AD, DB, BF и

фиг. 192.



AF; наконецъ должно обтесать бревно по направленію этихъ хордъ. Найти площадь основанія ADBF бруса, когда извѣстно, что діаметръ AB бревна равенъ 2 футамъ. — *(270 квадр. дюймовъ)*

фиг. 193.



100) Поле ABCD (фиг. 193), находящееся на скатѣ горы, имѣетъ видъ трапеціи, въ которой сторона AB перпендикулярна къ параллельнымъ сторонамъ AD и BC, сторона AD = 186 саж., BC = 143 саж. и AB = 48 саж. Съ этого поля получается такое-же количество произрастеній, какое получается съ трапеціи CDEF, имѣющей горизонтальное положеніе (см. задачу № 98). Сколько овса даетъ поле ABCD, когда извѣстно, что съ десятины можно получить 16 четвертей овса, вершина E ниже точки A на $20^3/_4$ сажени и вершина F ниже точки B на $15^1/_2$ сажень? — *(Почти $51^3/_4$ четверти).*

ОТДѢЛЪ VIII.

Рѣшеніе геометрическихъ задачъ въ полѣ.

§ 141. Означеніе точекъ въ полѣ. Въ полѣ означаются точки преимущественно кольями. Колъ есть деревянный шестъ, длиною около 3 аршинъ, съ заостренною оконечностью, къ которой прикрѣпляется желѣзный конусъ. При означеніи точекъ въ полѣ колья должны быть поставлены совершенно отвѣсно. Для выполненія этого условія, съемщикъ съ усиліемъ вбиваетъ колъ въ землю, стараясь

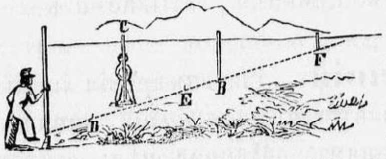
дать ему отвѣсное положеніе; потомъ онъ становится такимъ образомъ, чтобы основаніе кола пришлось между его носками, и наклоняетъ колъ къ себѣ или отъ себя, вправо или влѣво, до тѣхъ поръ, пока поверхность кола коснется къ его подбородку. При твердомъ грунтѣ земли съемщикъ сперва вколачиваетъ колышекъ и, разшатавъ его во всѣ стороны, онъ потомъ его вытаскиваетъ; въ образовавшееся такимъ образомъ углубленіе колъ втыкается безъ затрудненія.

§ 142. Провѣшиваніе линій. Извѣстно, что направленіе прямой линіи опредѣляется двумя точками; стало быть два кола, воткнутые въ землю въ нѣкоторомъ разстояніи одинъ отъ другаго, означаютъ въ полѣ положеніе прямой линіи. При значительномъ разстояніи между двумя кольями, означающими прямую линію, часто требуется поставить еще колья въ промежуточныхъ точкахъ этой прямой, или-же опредѣлить точки на ея продолженіи. Это дѣйствіе называется *вѣшеніемъ* или *провѣшиваніемъ* прямыхъ линій.

1) *На прямой AB (фиг. 194), означенной кольями A и B, поставить колья въ промежуточныхъ точкахъ ея.*

Съемщикъ становится въ двухъ шагахъ за коломъ A

фиг. 194.



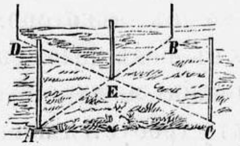
такимъ образомъ, чтобы ему показался колъ A закрывающимъ колъ B. Помощникъ съемщика, обращенный лицемъ къ прямой AB, держитъ предъ собою колъ C отвѣсно и постепенно приближается къ прямой AB. Съемщикъ, увидѣвъ колъ C близъ прямой AB, приказываетъ помощнику знаками идти съ коломъ впередъ или назадъ, до тѣхъ поръ, пока съемщику покажется, что колъ C закрываетъ колъ B; тогда онъ подаетъ помощнику знакъ: воткнуть колъ C въ землю. Точно такимъ-же образомъ ставятся колья въ точкахъ D и E прямой AB.

2) *Поставить колья на продолженіи прямой, означенной кольями F и B* (фиг. 194).

Эта работа производится однимъ человѣкомъ. Держа колъ отвѣсно предъ собою, съемщикъ становится въ такой точкѣ, изъ которой ему представляется колъ B закрывающимъ колъ F, при направленіи луча зрѣнія изъ-за кола, находящагося въ рукахъ съемщика; въ найденной такимъ образомъ точкѣ съемщикъ втыкаетъ свой колъ въ землю.

3) *Поставить колъ въ точкѣ пересѣченія двухъ прямыхъ AB и CD* (фиг. 195).

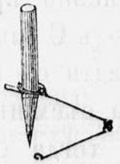
фиг. 195.



За коломъ A становится первый помощникъ съемщика, обращаясь лицемъ къ колу B, и за коломъ C становится второй помощникъ лицомъ къ колу D. Съемщикъ, держащій предъ собою колъ E отвѣсно, ставитъ его на прямой AB (по 1-му способу). Послѣ этого второй помощникъ, направляя лучъ зрѣнія по прямой CD, приказываетъ съемщику переставить колъ на прямую CD, а первый помощникъ въ это-же время наблюдаетъ, чтобы колъ E не сошелъ съ прямой AB. Это дѣйствіе продолжается до тѣхъ поръ, пока первому помощнику покажется колъ E закрывающимъ колъ B, а второму помощнику тотъже колъ E закрывающимъ колъ D; тогда съемщикъ по знакамъ, подаваемымъ обоими помощниками, втыкаетъ колъ E въ землю.

§ 143. Измѣреніе линій. Для измѣренія линій на мѣстности употребляется *мѣрная цѣпь*, длина которой равна 10 саженямъ. Мѣрная цѣпь состоитъ изъ 70 колѣнъ, дѣлаемыхъ изъ желѣзной проволоки такой толщины, чтобы она не гнулась; колѣна соединены между собою мѣдными кольцами (фиг. 196); разстояніе между центрами двухъ смежныхъ колецъ должно равняться одному футу. Крайнія кольца цѣпи дѣлаются больше промежуточныхъ для того, чтобы возможно было ими надѣвать цѣпь на колья, употребляемые при измѣреніи линій; эти колья, называемые *цѣпными* (фиг. 196), дѣлаются длиною около $1^1/_2$ аршина и отличаются отъ обыкновенныхъ кольевъ только тѣмъ, что у ихъ оконечности находится перекладина, которая не позволяетъ цѣпи спадать съ кола.

фиг. 196.

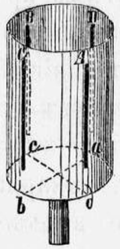


Чтобы измѣрить какую-нибудь прямую AF (фиг. 194), должно сперва поставить промежуточные колья D, C, E и т. д. (по 1-му способу § 142). Съемщикъ, надѣвъ цѣпь крайнимъ кольцомъ на цѣпной колъ, ставитъ этотъ колъ на мѣсто кола A; товарищъ съемщика надѣваетъ цѣпь другимъ крайнимъ кольцомъ на свой цѣпной колъ, и, таща цѣпь за собою посредствомъ цѣпнаго кола, идетъ по направленію линіи AF. Когда вся цѣпь вытянится, тогда товарищъ, воткнувъ свой цѣпной колъ въ землю, расправляетъ запутанныя колѣна цѣпи. Встряхнувъ цѣпь своимъ цѣпнымъ коломъ, товарищъ опять вытягиваетъ цѣпь и послѣ того вторично втыкаетъ цѣпной колъ въ землю. Съемщикъ повѣряетъ положеніе цѣпнаго кола товарища, дабы этотъ колъ находился на прямой AB. Потомъ по знаку, подаваемому съемщикомъ, товарищъ вынимаетъ цѣпной колъ изъ земли, и въ образовавшуюся ямочку ставитъ одинъ изъ имѣющихся при немъ десяти колышковъ, коихъ длина около фута. Послѣ этого товарищъ подаетъ съемщику знакъ, а самъ, взявъ свой цѣпной колъ въ руки и таща цѣпь за собою, идетъ по направленію къ колу F. Въ то-же время съемщикъ, вынувъ свой цѣпной колъ, отправляется за товарищемъ. Дойдя до воткнутаго колышка, съемщикъ останавливаетъ товарища, вынимаетъ колышекъ изъ земли и въ образовавшуюся ямочку ставитъ свой цѣпной колъ. Потомъ товарищъ опять расправляетъ запутанныя колѣна цѣпи, ставитъ цѣпной колъ по указанію съемщика, и наконецъ замѣняетъ этотъ колъ вторымъ колышкомъ. Точно такимъ-же образомъ продолжается измѣреніе до кола F. Когда всѣ колышки, воткнутые товарищемъ въ землю, перейдутъ къ съемщику, то пройдено 10 цѣпей или 100 саженъ.

Послѣ этого съемщикъ долженъ передать всѣ 10 колышковъ товарищу.

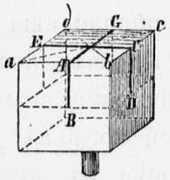
§ 144. Эккеръ. Инструментъ, употребляемый для вѣшенія перпендикулярныхъ и параллельныхъ линій, называется *эккеромъ*. Употребительнѣйшій эккеръ (фиг. 197) состоитъ изъ мѣднаго цилиндра, въ боковой поверхности котораго сдѣланы четыре узкіе прорѣзы въ перпендикулярномъ положеніи къ его основанію. Два прорѣза A и B проведены чрезъ концы діаметра *dc* основанія, а два другіе прорѣза C и D проходятъ чрезъ концы діаметра *ba*, перпендикулярнаго къ діаметру *dc*; слѣдовательно, если себѣ представить плоскость, проходящую чрезъ прорѣзы A и B, то она будетъ перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ прорѣзы C и D. Въ центрѣ дна цилиндра придѣлана трубка, которою эккеръ насаживается на колъ.

фиг. 197.



За неимѣніемъ цилиндрическаго эккера вы сами можете устроить эккеръ. Прикажите сдѣлать совершенно точный кубъ изъ крѣпкаго сухого дерева, имѣющій въ длину, ширину и высоту по 4 вершка. На этомъ кубѣ (фиг. 198) проведите карандашемъ діагонали *ac* и *bd*, а края *ab*, *bc*, *cd*, *ad* раздѣлите по-поламъ въ точкахъ A, C, G, E. Потомъ проведите прямыя AG и EC, которыя должны пройти чрезъ точку пересѣченія діагоналей *ac* и *bd*; къ прямымъ *ab*, *bc*, *cd*, *ad* изъ точекъ A, C, G, E возставьте перпендикуляры и отложите на нихъ части AB, CD и т. д. равныя половинѣ стороны *ab*. Наконецъ по направленію прямыхъ AB, AG, EC, CD и т. д. прикажите пилою сдѣлать прорѣзы.

фиг. 198.

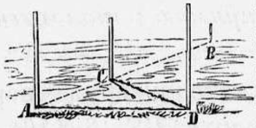


Для повѣрки эккера, т. е. чтобы удостовѣриться въ перпендикулярности луча зрѣнія, направленнаго чрезъ прорѣзы A и B (фиг. 197), къ лучу зрѣнія, проходящему чрезъ прорѣзы C и D, поставьте на какой-нибудь прямой три кола M, O, N, въ разстояніи около 10 сажень одинъ отъ другаго. Потомъ намѣсто средняго кола O поставьте эккеръ такимъ образомъ, чтобы, смотря чрезъ прорѣзъ A, вы увидѣли крайній колъ N въ прорѣзѣ B, или чтобы, смотря чрезъ прорѣзъ B, вы увидѣли крайній колъ M въ прорѣзѣ A. Потомъ прикажите товарищу поставить колъ P внѣ прямой MN такимъ образомъ, чтобы, смотря въ прорѣзъ C, вы увидѣли колъ P въ прорѣзѣ D; тогда для вѣрнаго эккера, прямая, означенная коломъ эккера (точкою O) и коломъ P, должна быть перпендикулярна къ прямой MN. Чтобы удостовѣриться въ перпендикулярности прямыхъ OP и MN, поворотите эккеръ такъ, чтобы прорѣзы C и D были направлены на колъ N (или M). Если теперь смотрящему въ прорѣзъ A представится колъ P въ прорѣзѣ B, то значитъ: эккеръ вѣренъ.

§ 145. *Къ прямой, означенной кольями A и B, возставить перпендикуляръ изъ точки A* (фиг. 199).

1) Отъ точки A до C по направленію прямой AB отмѣрьте цѣпью 3 сажени и на прямой AB поставьте колъ въ точкѣ C. На колъ A надѣньте крайнее кольцо цѣпи, а въ точкѣ C прикажите товарищу придержать кольцо цѣпи, отдѣляющее 9-ую отъ 10-ой сажени. Потомъ прикажите другому товарищу вытянуть цѣпь за кольцо, отдѣляющее 4-ую отъ 5-ой сажени, такъ, чтобы отъ кола A до этого кольца было 4 саж., и воткнуть колъ D въ землю тамъ, гдѣ придется кольцо вытянутой цѣпи; тогда требуемый перпендикуляръ обозначится кольями A и D.

фиг. 199.

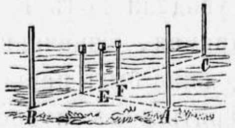


Чтобы убѣдиться въ перпендикулярности прямыхъ AB и AD, узнайте, будетъ-ли треугольникъ ACD прямоугольный. Въ немъ сторона AC = 3 саж., CD = 5 саж. и AD = 4 саж. Если этотъ треугольникъ прямоугольный, то площадь квадрата, построеннаго на длиннѣйшей сторонѣ CD, должна равняться площадямъ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ AC и AD (§ 120). Здѣсь дѣйствительно, 25 квад. саж. = 16 квад. саж. + 9 квад. саж.; слѣдовательно треугольникъ ACD прямоугольный и уголъ CAD прямой.

2) Эта задача рѣшается посредствомъ эккера точно такъ, какъ выше объяснено (§ 144).

§ 146. *На прямую, означенную кольями B и C, опустить перпендикуляръ изъ точки, означенной коломъ A.*

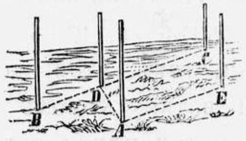
фиг. 200.



На прямой BC (ф. 200) поставьте колъ въ такой точкѣ F, которая на-глазъ кажется подошвою перпендикуляра. Потомъ замѣните этотъ колъ эккеромъ и направьте его прорѣзы A и B на точку C. Если, смотря въ прорѣзы C и D, вы не увидите кола A, то вы должны переставить эккеръ вправо или влѣво отъ точки F. Предположите, что эккеръ переставленъ въ точку E прямой BC и прорѣзы A и B опять направлены на точку C, но въ прорѣзахъ C и D не представляется колъ A. Такимъ-же образомъ вы должны переставлять эккеръ до тѣхъ поръ, пока въ прорѣзахъ C и D представится колъ A въ то время, когда прорѣзы A и B направлены на колъ C.

§ 147. *Чрезъ точку A провѣшить прямую параллельно къ прямой BC* (фиг. 201).

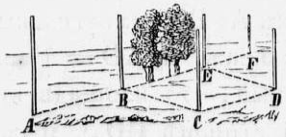
фиг. 201.



Изъ точки A опустите эккеромъ перпендикуляръ AD на прямую BC (§ 146) и потомъ возставьте перпендикуляръ AE къ прямой AD изъ точки A. Почему прямая AE параллельна къ прямой BC?

Продолжить линію AB за препятствіе (фиг. 202).

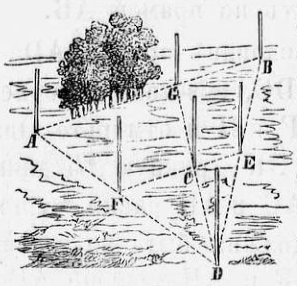
фиг. 202.



Изъ точки B къ прямой AB возставьте перпендикуляръ BC такой длины, чтобы точка C пришлась внѣ препятствія. Измѣривъ цѣпью разстояніе между кольями B и C, вы возставите перпендикуляръ CD къ прямой BC изъ точки C. Потомъ изъ точки D возставьте перпендикуляръ къ прямой CD и на немъ отмѣрьте цѣпью отъ D до E длину DE, равную перпендикуляру BC. Наконецъ изъ точки E возставьте перпендикуляръ EF къ прямой ED. Почему прямая EF находится на продолженіи прямой AB?

Между кольями A и B найти промежуточную точку прямой AB, когда изъ точки A невидна точка B (фиг. 203).

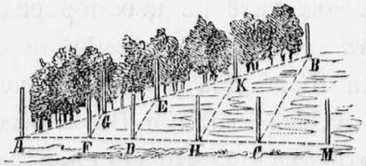
фиг. 203.



Въ какой-нибудь точкѣ, изъ которой видны точки A и B, поставьте колъ D и измѣрьте разстоянія AD и BD цѣпью. Потомъ отъ A до F отмѣрьте половину длины AD, и отъ B до E половину длины BD; въ точкахъ F и E поставьте колья и измѣрьте цѣпью разстояніе FE между ними; половину этого разстоянія отмѣрьте отъ F до C по направленію FE и измѣрьте разстояніе DC. Наконецъ по продолженію прямой DC отмѣрьте длину CG, равную разстоянію DC; точка G должна находиться на прямой AB. Дѣйствительно, въ треугольникахъ ABD и FED уголъ ADB общій и AD : FD = BD : DE, потому-что AD вдвое больше FD, и BD вдвое больше DE; стало быть эти треугольники подобны и прямыя AB и FE параллельны (§ 58). Въ этихъ подобныхъ треугольникахъ чрезъ вершину D проведены прямыя DG и DC, гдѣ DG вдвое больше DC. Такъ какъ прямая DC проведена до точки C стороны FE, то и прямая DG должна доходить до стороны AB, или точка G должна находиться на прямой AB.

§ 148. *По направленію прямой AB проложить просѣку въ лѣсу* (фиг. 204).

фиг. 204.

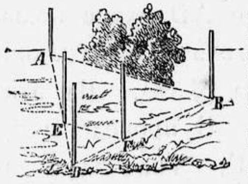


Чрезъ точку A провѣшивъ прямую AM, опустите на нее перпендикуляръ BC изъ точки B и измѣрьте разстоянія AC и BC. Половину разстоянія AC отмѣрьте отъ A до D и изъ точки D къ прямой AM возставьте перпендикуляръ; на этомъ перпендикулярѣ отмѣрьте длину DE, равную половинѣ разстоянія BC — получите точку E на прямой AB. Дѣйствительно, такъ какъ AC : AD=BC : DE и уголъ ACB = углу ADE (какъ прямые углы), то вы заключаете, что треугольники ABC и AED подобны и углы BAC и EAD равны — что возможно только въ томъ случаѣ, когда точка E лежитъ на прямой AB.

Отмѣривъ длину AF, равную половинѣ прямой AD, и длину DH, равную половинѣ прямой DC, возставьте перпендикуляры къ прямой AM изъ точекъ F и H и отмѣрьте длину FG, равную $^1/_4$ длины BC, и длину HK, равную $^3/_4$ длины BC, потому-что AF есть $^1/_4$ прямой AC и AH равно $^3/_4$ прямой AC; слѣдовательно FG и HK должны быть во столько разъ меньше BC, во сколько разъ AF и AH меньше AC.

§ 149. *Узнать, сколько сажень между точками A и B, когда они доступны, но между ними находится препятствіе* (фиг. 205).

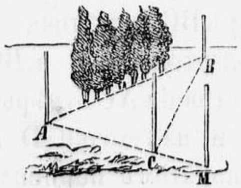
фиг. 205.



1) Избравъ такую точку D, изъ которой видны точки A и B, измѣрьте цѣпью разстоянія AD и BD. Потомъ отъ D до E отмѣрьте длину, равную половинѣ (или $^1/_4$ или $^1/_3$) длины DA, и отъ D до F длину, равную половинѣ (или $^1/_4$ или $^1/_3$) длины DB. Наконецъ измѣривъ разстояніе EF, вы найдете длину AB, потому-что EF должно быть во столько разъ меньше AB, во сколько разъ DE меньше DA; такъ напримѣръ, если DE равно $^1/_4$ прямой DA, то разстояніе AB должно быть въ четыре раза больше длины EF.

2) Чрезъ точку A (фиг. 206) провѣшивъ какую-нибудь прямую AM, опустите на нее перпендикуляръ BC изъ точки B и измѣрьте разстоянія AC и BC. Для примѣра предположите, что AC=72 саж. и BC = 65 саж. Вы уже знаете (§ 121), что для опредѣленія гипотенузы AB прямоугольнаго треугольника

фиг. 206.

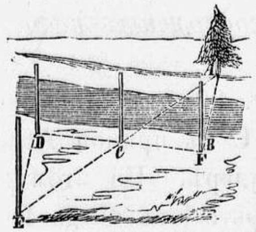


ABC должно взять квадраты чиселъ 72 и 65 — получите 5184 и 4225; потомъ сложивъ числа 5184 и 4225, вы должны извлечь квадратный корень изъ 9409 — получите AB=97 саж.

§ 150. *Узнать, сколько сажень содержитъ разстояніе AB, когда точка A недоступна* (фиг. 207).

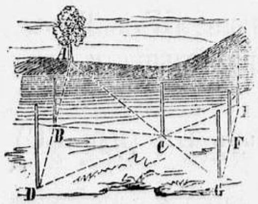
1) Желая узнать ширину AB рѣки, вы поставите эккеръ въ точкѣ F на продолженіи прямой AB и возставите перпендикуляръ изъ точки F къ прямой AF; на этомъ перпендикулярѣ отмѣрьте цѣпью равныя длины FC и CD и поставьте колья C и D. Изъ точки D возставьте къ прямой FD перпендикуляръ и отъищите точку E его пересѣченія съ прямою AC (§ 142, 3). Наконецъ измѣривъ цѣпью длину DE, вы узнаете, сколько саженъ въ прямой AF. Въ самомъ дѣлѣ, FC = CD, уг. ACF = уг. DCE (§ 15) и углы AFC и CDE равны (прямые углы); слѣдовательно треугольники ACF и DCE равны (§ 26) и стороны AF и DE равны. Измѣривъ длину BF, вы должны ее вычесть изъ длины DE, чтобы опредѣлить разстояніе AB.

фиг. 207.



2) Избравъ какую-нибудь точку C (фиг. 208), изъ которой видны точки A и B, вы поставите колъ D на продолженіи прямой AB и измѣрите разстоянія BC и CD. На продолженіи прямой BC отмѣрьте длину CF, равную $^1/_4$ (или $^1/_2$ или $^1/_3$) длины BC, и на продолженіи прямой DC длину CE, равную $^1/_4$ (или $^1/_2$ или $^1/_3$) длины DC. Потомъ найдите точку G пересѣченія продолженныхъ прямыхъ AC и EF (§ 142, 3) и измѣрьте длину FG; тогда разстояніе AB будетъ во столько разъ больше FG, во сколько разъ прямая BC длиннѣе CF.

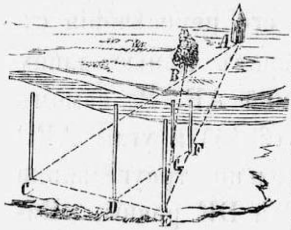
фиг. 208.



Для объясненія справедливости этого рѣшенія, разсмотрите треугольники BCD и CEF; въ нихъ углы BCD и ECF равны (§ 15) и BC : CF = DC : CE, слѣдовательно эти треугольники подобны и углы DBC и CFE равны. По равенству этихъ угловъ прямыя AD и EG параллельны; слѣдовательно уг. CGF = уг. BAC и уг. CFG = уг. ABC (§ 17). Такъ какъ и углы ACB и FCG равны, то треугольники ABC и CFG подобны (§ 56) и прямая AB во столько разъ больше FG, во сколько разъ прямая BC больше CF.

§ 151. *Узнать, сколько сажень содержитъ недоступное разстояніе AB.*

фиг. 209.

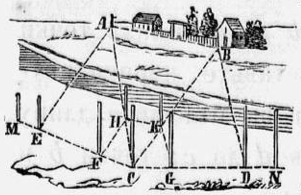


1) На продолженіи прямой AB (фиг. 209) поставьте колъ C и изъ точки C къ прямой AC возставьте перпендикуляръ. На этомъ перпендикулярѣ отмѣрьте отъ C до E какую-нибудь длину, и отъ E до D четвертую часть (или какую-нибудь часть) этой длины. Изъ точки D къ прямой EC возставьте перпендикуляръ и отмѣтьте кольями точки его пересѣченія: F съ прямою AE, и G съ прямою BE. Наконецъ измѣривъ разстояніе FG, вы найдете разстояніе AB, которое должно быть во столько разъ больше FG, во сколько разъ EC больше ED. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники AEC и DEF подобны по параллельности сторонъ AC и DF, слѣдовательно (§ 58) EC : ED = EA : EF, т. е. EC во столько разъ больше ED, во сколько разъ EA больше EF. Также треугольники ABE и FGE подобны по параллельности прямыхъ AB и FG, слѣдовательно EA : EF = AB : FG, или AB во столько разъ больше FG, во сколько разъ EA (или EC) больше EF (или ED).

2) Избравъ какую-нибудь точку C, изъ которой видны точки A и B (фиг. 210) провѣдите какія-нибудь прямыя CM и CN чрезъ точку C. Потомъ опустите перпендикуляры: AE изъ точки A на прямую MC, и BD изъ точки B на прямую CN, и цѣпью измѣрьте прямыя CE и CD. Для примѣра

предположите, что прямая EC содержитъ 32 саж., а прямая CD = 28 саж. По направленію CE отъ C до F отмѣрьте 8 саж. (4-ую часть 32 саж.), а по направленію CD отъ C до G — 7 саж. (4-ую часть 28 саж.). Изъ точки F къ прямой CE возставьте перпендикуляръ и въ точкѣ H его пересѣченія съ прямою AC поставьте колъ; къ прямой CD изъ точки G возставьте перпендикуляръ GK, и поставьте колъ K въ точкѣ пересѣченія прямыхъ BC и GK. Наконецъ измѣривъ прямую HK, вы найдете разстояніе AB, которое должно быть во столько разъ больше прямой HK, во сколько разъ прямая EC больше прямой FC.

фиг. 210.

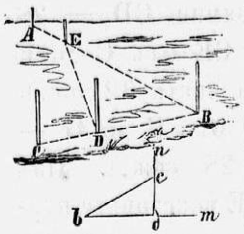


По параллельности прямыхъ FH и AE треугольники CFH и CEA подобны; слѣдовательно CA во столько разъ больше CH, во сколько разъ CE больше CF. Также изъ подобныхъ треугольниковъ BCD и KCG вы узнаете, что CB во столько разъ больше CK, во сколько разъ CD больше CG. Такъ какъ CE : CF = CD : CG, то вы заключаете, что CA : CH = CB : CK и слѣдовательно треугольники ABC и HKC подобны. Наконецъ изъ этихъ треугольниковъ вы узнаете, что AB во столько разъ больше HK, во сколько разъ CA больше CH, но вы знаете, что CA во столько разъ больше CH, во сколько разъ CE больше CF; слѣдовательно и AB во столько разъ больше HK, во сколько разъ CE больше CF.

§ 152. *Уголъ ABC, означенный кольями A, B и C, начертить на бумагѣ.*

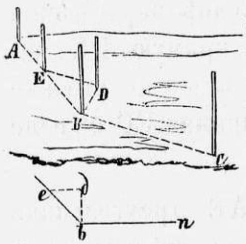
1) На прямой BC (фиг. 211) поставьте колъ въ какой-нибудь точкѣ D, и къ прямой BC изъ точки D возставьте перпендикуляръ; въ точкѣ E пересѣченія этого перпендикуляра съ прямою AB поставьте колъ, и наконецъ измѣрьте

фиг. 211.



прямыя BD и DE. На бумагѣ проведя какую-нибудь прямую bm, отложите длину BD по масштабу отъ b до d, и изъ точки d къ прямой bm возставьте перпендикуляръ dn, на которомъ вы отложите длину DE по масштабу отъ d до c; точки b и c соедините прямою bc.

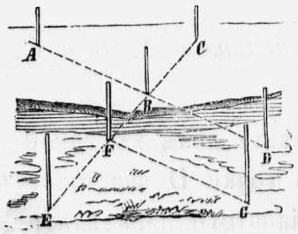
фиг. 212.



2) Чтобы на бумагу нанести тупой уголъ ABC (фиг. 212), изъ точки B къ прямой BC возставьте перпендикуляръ BD и изъ точки D къ прямой BD — перпендикуляръ DE; въ точкѣ E пересѣченія этого перпендикуляра съ прямою AB поставьте колъ и измѣрьте прямыя BD и DE. На бумагѣ проведя прямую bn, изъ точки b къ этой прямой возставьте перпендикуляръ и на немъ по масштабу отложите длину BD отъ b до d. Къ прямой bd изъ точки d возставьте перпендикуляръ и на немъ по масштабу отложите длину DE отъ d до e. Наконецъ соедините точки b и e прямою be.

Треугольникъ bde, образовавшійся на бумагѣ, подобенъ треугольнику BDE, потому-что bd во столько разъ меньше BD, во сколько разъ de меньше DE, и углы bde и BDE равны; слѣдовательно уг. dbe = уг. DBE.

фнг. 213.

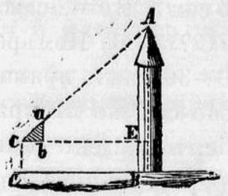


3) Чтобы нанести на бумагу недоступный уголъ ABC (фиг. 213), поставьте колья D и E на продолженіи прямыхъ AB и CB. Потомъ провѣшьте прямую FG параллельно къ прямой BD чрезъ какую-нибудь точку F продолженной прямой CB. Наконецъ вы начертите на бумагѣ уголъ, равный углу EFG, какъ выше объяснено.

Уголъ EFG = углу EBD по параллельности прямыхъ FG и BD; уголъ ABC = углу EBD, какъ противолежащіе; слѣдовательно уголъ EFG = углу ABC.

§ 153. *Узнать, сколько саженъ содержитъ высота AB предмета* (фиг. 214).

фиг. 214.



На поверхности измѣряемаго предмета замѣтьте точку E, находящуюся на равной высотѣ съ вашимъ глазомъ. Потомъ возьмите деревянный прямоугольный треугольникъ, коего катеты равны, и держите его отвѣсно вершиною c къ глазу такъ, чтобы катетъ ab былъ обращенъ къ предмету и катетъ cb былъ направленъ на точку E. Сохраняя это положеніе треугольника abc, вы приближаетесь къ предмету AB или удаляетесь отъ него до тѣхъ поръ, пока вамъ покажется, что вершина A измѣряемой высоты находится на продолженіи гипотенузы ca. Поставивъ колъ C въ послѣдней точкѣ вашего стоянія, вы измѣрите разстояніе CB до подошвы предмета; это разстояніе должно равняться высотѣ AE, потому-что треугольники AEc и abc подобны, разстоянія cE и CB равны (почему?) и стороны ab и bc равны; слѣдовательно прямая AE равна cE (или CB). Наконецъ, чтобы найти высоту AB, вы должны измѣрить высоту EB (или cC) и ее приложить къ высотѣ AE. Предположите для примѣра, что разстояніе CB равно $3^{1}/_{2}$ саженямъ и высота cC равна $1^{1}/_{2}$ аршинамъ; сколько саженъ содержитъ высота AB? Какъ найти высоту AB, когда извѣстно, что катетъ ab составляетъ $^{2}/_{3}$ катета cb?

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

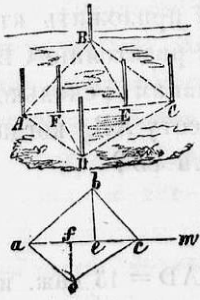
1) Измѣреніемъ найдено (фиг. 203), что AD = 15 саж. и BD=24 саж.; потомъ отъ D до F отмѣрено 5 саж., отъ F до E — 7 саж. и отъ D до C — 7 саж.; сколько саженъ должны содержать прямыя DE, FC и CG? — 2) Прямая AC (фиг. 204) равна 142 саж., перпендикуляръ BC равенъ 35 саж., прямая AF=$^{1}/_{4}$ AC, прямая AD равна $^{1}/_{2}$ AC и прямая AH равна $^{3}/_{4}$ AC; сколько саженъ въ каждомъ изъ перпендикуляровъ HK, DE,

FG? — 3) Сколько сажень содержитъ разстояніе AB (фиг. 205), когда извѣстно, что AD=36 саж., BD=45 саж., EF=30 саж. и DE составляетъ $^1/_3$ прямой AD? — 4) Сколько сажень въ прямой AB (фиг. 206), когда извѣстно, что прямая AC = 77 саж. и перпендикуляръ BC = 36 саж.? — 5) Сколько сажень въ прямой AB (фиг. 207), когда извѣстно, что FC=25 саж., BF=2 саж., DE = 6 саж. и прямая CD равна $^1/_3$ прямой FC? — 6) Измѣреніемъ найдено (фиг. 208), что BC=23 саж., CD=30 саж., прямая CF равна $^1/_5$ прямой BC и FG = 7 саж.; сколько сажень въ прямой EF и въ разстояніи AB? — 7) Измѣреніемъ найдено (фиг. 209), что CE = 37 саж., прямая ED равна $^1/_4$ разстоянія CE и FG = $11^3/_4$ саж.; сколько сажень содержитъ разстояніе AB? — 8) Прямая CE = 35 саж. (фиг. 210), CD = 25 саж., прямая CF равна $^1/_3$ прямой CE и HK = 14 саж.; сколько сажень въ прямыхъ CG и AB? — 9) Измѣреніемъ найдено (фиг. 211), что BD = 15 саж. и DE = 20 саж.; сколько частей дюйма (при масштабѣ 25 саж. въ дюймѣ) должны содержать прямыя *bd* и *dc* на бумагѣ, чтобы уголъ *cbd* равнялся углу EBD? — 10) Найти высоту AB (фиг. 214), когда *ab* составляетъ $^3/_5$ катета *cb*, BC = $2^2/_3$ саж. и $_c$C = 1 ар. 7 вершк.?

§ 154. *Начертить на бумагѣ контуръ (очеркъ) пашни.*

Въ вершинахъ A, B, C и D контура (фиг. 215) поставьте колья и въ то-же время нарисуйте на особой бумажкѣ фигуру ABCD на-глазъ; этакій чертежъ, составленный отъ руки безъ всякихъ инструментовъ, называется *брулльономъ* (черновой чертежъ). Провѣшивъ діагональ AC, опустите на нее перпендикуляры BE и DF изъ вершинъ B и D; на брулльонѣ проведите діагональ *ac* и перпендикуляры *be* и *df*. Потомъ измѣрьте цѣпью разстоянія AE, AF, AC и перпендикуляры BE и DF, и запишите найденныя числа на брулльонѣ подлѣ соотвѣтствующихъ линій.

фиг. 215.



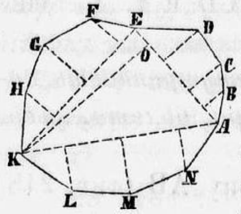
Чтобы начертить фигуру ABCD по масштабу, проведите на планѣ прямую *am* и отложите на ней длину AC отъ *a* до *c*, длину AE отъ *a* до *e* и длину AF отъ *a* до *f*. Потомъ

изъ точекъ *e* и *f* возставьте перпендикуляры къ прямой *am*, соображаясь съ брулльономъ, и отложите длину EB отъ *e* до *b* и длину FD отъ *f* до *d*. Наконецъ проведя прямыя *ab*, *bc*, *cd*, *da*, вы получите требуемый планъ пашни.

§ 155. *Требуется нанести на бумагу контуръ, состоящій изъ многихъ сторонъ* (фиг. 216).

Во всѣхъ изгибахъ контура поставьте колья и нарисуйте его брулльонъ на особой бумажкѣ. Соображаясь съ этимъ брулльономъ, провѣшьте діагонали AE, AK и KE такимъ образомъ, чтобы образовался треугольникъ AKE. Изъ точекъ B, C, D опустивъ перпендикуляры на діагональ AE, измѣрьте ихъ длины и разстоянія между ними на діагонали AE. Точно такимъ-же образомъ вы поступите и относительно діагоналей AK и KE.

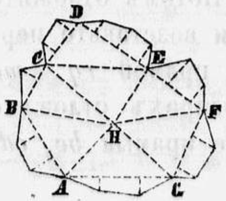
фиг. 216.



На бумагѣ проведя прямую, отложите на ней по масштабу длину діагонали отъ *a* до *e*. Потомъ дайте циркулю раствореніе, равное по масштабу діагонали AK и, поставя одну ножку циркуля въ точкѣ *a*, опишите дугу; изъ точки *e* радіусомъ, равнымъ по масштабу діагонали EK, опишите еще дугу; точку *k* пересѣченія этихъ дугъ соедините съ точками *a* и *e* прямыми *ka* и *ke*. На сторонахъ треугольника *aek* отложите по масштабу разстоянія между перпендикулярами, возставьте перпендикуляры къ прямымъ *ae*, *ak* и *ek* и т. д. Для вычисленія площади нанесенной фигуры вычислите многоугольники *abcdea*, *ekhgfe*, *aklmna* и треугольникъ *ake*. Чтобы найти площадь этого треугольника, вы опустите перпендикуляръ KO на прямую AE и измѣрите его длину.

Чтобы снять большой участокъ (фиг. 217), вы поступите слѣдующимъ образомъ: поставя колья во всѣхъ изгибахъ контура, начертите его брулльонъ. На мѣстности проведите діагонали AB, BC, CD, DE, EF, FG и AG близъ сторонъ контура, и потомъ еще прямыя CH, CE, EH, FH, BH, AH и GH

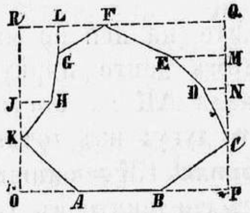
фиг. 217.



такъ, чтобы образовались треугольники. Цѣпью измѣривъ стороны этихъ треугольниковъ, опустите перпендикуляры изъ вершинъ контура на діагонали AB, BC, CD, DE, EF, FG и AG, и потомъ продолжайте работу по предъидущему. На бумагѣ начертите сперва средній треугольникъ CEH (какъ выше было объяснено), потомъ треугольники FHE, BHC, FGH, ABH и AGH и наконецъ треугольникъ CDE. Перпендикуляры и разстоянія между ними вы нанесете относительно начерченныхъ діагоналей AB, BC, CD и т. д. точно такъ, какъ выше было объяснено.

§ 156. *Нанести контуръ фигуры, внутренность которой недоступна, напримѣръ контуръ озера, болота, лѣса, засѣяннаго поля и т. д.*

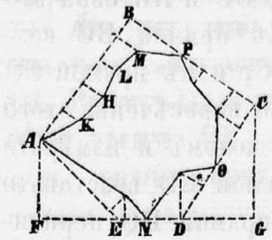
фиг. 218.



Продолживъ сторону AB (фиг. 218) контура въ обѣ стороны, опустите на нее перпендикуляры изъ наиболѣе выдающихся вершинъ C и K; въ точкахъ O и P этихъ перпендикуляровъ поставьте колья. Продолживъ перпендикуляръ OK, вы опустите перпендикуляръ FR на эту продолженную прямую. Въ точкѣ пересѣченія продолженныхъ перпендикуляровъ RF и PC поставьте колъ Q. Для повѣрки работы должно измѣрить прямыя OP, PQ, RQ и OR, чтобы убѣдиться въ равенствѣ прямыхъ PQ и OR, RQ и OP. Потомъ опустите перпендикуляры: HJ на прямую OR, GL на прямую RQ, EM и DN на прямую PQ. Измѣривъ эти перпендикуляры и разстоянія OA, AB, BP, PC, CN, NM, MQ, QF и т. д., вы запишете эти длины на брульонѣ.

На бумагѣ начертите сперва прямоугольникъ *opqr*, равный по масштабу прямоугольнику OPQR. Потомъ отложите разстоянія *oa*, *ab*, *bp*, *pc*, *cn*, *nm* и т. д., и возставьте перпендикуляры: *ih* къ прямой *or*, *lg* къ прямой *rq*, *me* и *nd* къ прямой *pq*; на этихъ перпендикулярахъ отложите измѣренныя длины по масштабу и проведите прямыя *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg* и т. д.

фиг. 219.

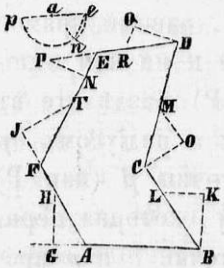


Если снимаемый контуръ великъ, то обводятъ его какимъ-нибудь многоугольникомъ. Для этого близъ сторонъ контура провѣшиваются прямыя: AE чрезъ вершину A (фиг. 219), ED чрезъ вершину N, DC чрезъ вершину O, CB чрезъ вершину P и AB чрезъ вершину A. Продолживъ прямую DE въ обѣ стороны, на нее опустите перпендикуляры CG и AF изъ вершинъ C и A. Потомъ вы измѣрите прямыя AB, BC, CG, CD, GD, DE, AE, AF, EF; изъ точекъ K, H, L, M опустите перпендикуляры на прямую AB, потомъ перпендикуляры на прямыя BC, CD и т. д.

На бумагѣ проведя какую-нибудь прямую, вы на ней по масштабу отложите части GD, DE, EF и изъ точекъ G и F возставите перпендикуляры къ прямой EG; отъ F до A и отъ G до C отложите длину этихъ перпендикуляровъ. Потомъ изъ точки A радіусомъ, равнымъ по масштабу прямой AB, опишите дугу, и изъ точки C радіусомъ, равнымъ по масштабу прямой CB, еще дугу. Соедините точку B пересѣченія этихъ дугъ съ точками A и C прямыми BA и BC, точки A и E прямою AE, и точки C и D прямою CD. Нанесеніе точекъ K, H, L, M, P, O и т. д. производится по предъидущему.

§ 157. *Нанести контуръ луга, окруженнаго лѣсомъ.*

фиг. 220.



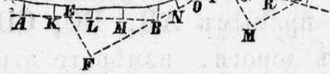
Означивъ вершины A, B, C, D, E, F (фиг. 220) контура кольями, вы измѣрите прямыя AB, BC, CD, DE и т. д. Поставивъ колъ G на продолженіи прямой BA, возставьте перпендикуляръ къ прямой GB, точку H его пересѣченія съ стороною AF означьте коломъ и цѣпью измѣрьте прямыя AG и GH. Изъ точки B къ прямой GB возставьте перпендикуляръ BK и изъ точки K къ прямой BK — перпендикуляръ KL; точку L пересѣченія прямыхъ BC и KL означьте коломъ и измѣрьте прямыя BK и KL. Къ прямой BC возставьте перпендикуляръ CO изъ вершины C, и къ прямой CO перпендикуляръ OM изъ точки O; точку M пересѣченія этого перпендикуляра съ прямою CD означьте коломъ и измѣрьте прямыя CO и OM. Изъ точки D къ прямой CD возставьте перпендикулядъ DQ и изъ точки Q къ прямой DQ перпендикуляръ QR; точку R пересѣченія прямыхъ DE и QR означьте коломъ и измѣрьте прямыя DQ и QR. На продолженіи прямой DE поставьте колъ P и изъ точки P на прямую EF опустите перпендикуляръ; измѣрьте прямыя EP, PN и NE. На продолженіи прямой AF поставьте колъ J и къ прямой AJ изъ точки J возставьте перпендикуляръ JT. Означивъ точку T пересѣченія прямыхъ FE и JT коломъ, вы измѣрите прямыя FJ и JT. На прямой, проведенной на бумагѣ, отложите по масштабу части GA и AB, и изъ точекъ G и B возставьте перпендикуляры, равные прямымъ GH и BK. Проведя прямую чрезъ точки A и H, на ней отложите длину прямой AF. Къ прямой BK изъ точки K возставьте перпендикуляръ, равный перпендикуляру KL. Чрезъ точки B и L проведите прямую и на ней отложите длину прямой BC. Изъ точки C къ прямой BC возставьте перпендикуляръ, равный прямой CO и изъ точки O къ прямой CO — перпендикуляръ, равный прямой OM. Чрезъ точки C и M проведите прямую и на ней отложите часть CD. Къ прямой CD изъ точки D возставьте перпендикуляръ, равный прямой DQ и изъ точки Q къ прямой DQ перпендикуляръ, равный прямой QR. Чрезъ точки D и R проведите прямую и на ней отложите части DE и EP. Прямую *ep* (или EP) раздѣлите въ точкѣ *a* на двѣ равныя части и изъ точки *a* радіусомъ *ap* (или *ae*) опишите полуокружность; изъ точки *p* (или P) радіусомъ равнымъ прямой PN опишите дугу, которая пересѣчетъ полуокружность въ точкѣ *n*. Чрезъ точки *e* и *n* про-

ведите прямую, которая, пройдя чрезъ точку F, должна содержать число сажень прямой EF.

Для нанесенія этого контура на бумагу можно поступить еще слѣдующимъ образомъ: сперва вы нанесете прямыя AB, BC и CD, а потомъ прямыя AF, FE и ED. Чтобы нанести прямую FE, вы продолжите сторону AF и отложите часть, равную прямой FJ; къ прямой AJ изъ точки J возставьте перпендикуляръ, равный прямой JT. Чрезъ точки F и T проведя прямую, отложите на ней части, равныя прямымъ FN и NE, и изъ точки N къ прямой FE возставьте перпендикуляръ, равный прямой NP. Наконецъ чрезъ точки P и E проведите прямую, которая, пройдя чрезъ точку D, должна содержать число сажень прямой PD.

§ 158. *Нанесеніе береговъ рѣкъ* (фиг. 221). Провѣшивъ прямыя AB, BC, CD и т. д. въ недальномъ разстояніи отъ рѣки, возставьте перпендикуляръ CM къ прямой BC изъ точки C и перпендикуляръ MG къ прямой CM изъ точки M. На продолженіи прямой BC поставьте колъ F и возставьте перпендикуляръ FE изъ точки F къ прямой BF; точку E пересѣченія прямыхъ AB и FE означьте коломъ и измѣрьте прямыя AE, EB, EF, FB, BC, CM, MG, CG, CD и т. д. Изъ всѣхъ изгибовъ берега опустите перпендикуляры на прямыя AB, BC, CD и т. д., измѣрьте длины этихъ перпендикуляровъ и разстоянія между ними. Найденныя числа запишите на бруллонѣ.

Фиг. 221.

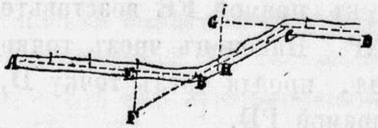


На бумагѣ проведя прямую, отложите на ней части FB и BC, и къ прямой FB изъ точки F возставьте перпендикуляръ, равный по масштабу перпендикуляру EF; соедините точки B и E прямою BE, и на ней отложите часть BA. Къ прямой CF изъ точки C возставьте перпендикуляръ и на немъ отложите часть CM. Изъ точки M къ прямой CM возставьте перпендикуляръ, равный перпендикуляру MG, и чрезъ точки

C и G проведите прямую, на которой вы отложите часть, равную прямой CD. На прямыхъ AB, BC, CD отложите части AK, KL, LM, MB, BN и т. д. и, къ прямымъ AB, BC, CD возставивъ перпендикуляры изъ точекъ A, K, L, M, N, O, P и т. д., отложите длину этихъ перпендикуляровъ. Получивъ оконечныя точки этихъ перпендикуляровъ, вы по этимъ точкамъ срисуете кривизну берега съ натуры.

§ 159. *Нанесеніе дорогъ.* На самой дорогѣ провѣшьте прямыя AB, BC, CD (фиг. 222). Изъ какой-нибудь точки E прямой AB возставьте перпендикуляръ. Въ точкѣ F пересѣченія этого перпендикуляра съ продолженной прямою CB поставьте колъ. Изъ точки H прямой BC опустите перпендикуляръ на продолженную прямую DC и въ точкѣ G его пересѣченія съ прямою DG поставьте колъ. Потомъ измѣрьте прямыя AB, BC, CD, AE, EB, EF, BH, HC, GH и т. д. Къ прямымъ AB, BC, CD возставьте перпендикуляры до краевъ дороги, измѣрьте эти перпендикуляры и разстоянія между ними. Нанесеніе краевъ дороги на бумагу производится по предъидущему (§ 156).

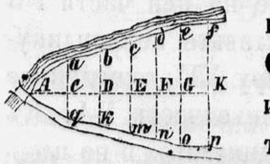
фиг. 222.



§ 160. *Требуется вырубить лѣсъ, заключенный между рѣкою Af (фиг. 223), дорогою Ap и просѣкою fp. Извѣстно, что съ десятины очень частаго и крупнаго лѣса получается 80 бревенъ. Сколько получится бревенъ изъ лѣса, нанесеннаго на планъ?*

Проведя на планѣ прямую AK перпендикулярно къ прямой fp, вы раздѣлите прямую AK на произвольное число равныхъ частей AC, CD, DE и т. д. и чрезъ точки C, D, E и т. д. проведете прямыя aq, bk, cm и т. д. параллельно къ прямой fp. Потомъ по масштабу плана измѣрьте прямыя AC, CD, DE и т. д. и перпендикуляры aq, bk, cm и т. д. Для примѣра предположите, что прямая AC равна 46 саж., $aq = 130$ саж., $bk = 145$ саж., $cm = 155$ саж., $dn = 163$ саж., $eo = 180$ саж. и $fp = 210$ саж. Площадь треугольника Aaq содержитъ 2990 кв. саж., площадь трапеціи $abkq = 6325$ кв. саж., площадь трапеціи $bcmk = 6900$ кв. саж., площадь трапеціи $cdnm = 7314$ кв. саж. площадь трапеціи $deon = 7889$ кв. саж., площадь трапеціи $efpo = 8970$ кв. саж. Вся площадь содержитъ 40388 кв. саж. или $16^{497}/_{600}$ десят. (Отв. 1346 бревенъ).

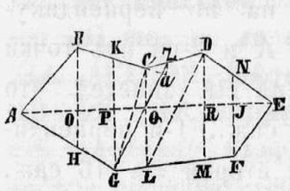
фиг. 223.



§ 161. *Участокъ, представленный на планѣ въ видѣ многоугольника ABCDEFG (фиг. 224), требуется раздѣлить на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ точку G. Найти на планѣ направленіе прямой раздѣла.*

Проведя на планѣ діагональ AE и къ ней перпендикулярно прямыя BH, GK, CL, DM, FN чрезъ вершины B, C, D, F, G, вы узнаете по масштабу, что прямая AO содержитъ 39 саж., OP = 20 саж., PQ = 26 саж., QR = 47 саж., RJ = 4 саж., JE = 35 саж., и перпендикуляръ BH равенъ 81 саж., GK = 100 саж., CL = 84 саж., DM = 135 саж. и NF = 110 саж. Площадь треугольника ABH равна $1579^1/_2$ квад. саж., площадь трапеціи BKGH = 1810 квад. саж., площадь трапеціи CKGL = 2392 квад. саж., площадь трапеціи CDML = $5146^1/_2$ квад. саж., площадь трапеціи DNFM = 490 квад. саж. и площадь треугольника NEF = 1925 кв. саж.; площадь многоугольника ABCDEFG равна 13343 кв. саж., а ея половина равна $6671^1/_2$ кв. саж. Соединивъ вершины C и G діагональю CG, вычислите площадь ABCG, состоящую изъ треугольниковъ ABH и KCG и трапеціи BKGH. Площадь треугольника KCG равна 1300 квад. саж. Площадь ABCG содержитъ $1579^1/_2$ квад. саж., 1810 квад. саж. и 1300 квад. саж., или $4689^1/_2$ кв. саж.; слѣдовательно къ ней должно придать $6671^1/_2$ безъ $4689^1/_2$ или 1982 кв. саж., чтобы получить половину участка

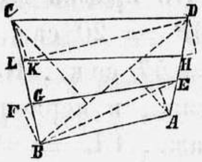
фиг. 224.



т. е. къ площади ABCG вы должны придать такой треугольникъ, коего площадь содержитъ 1982 кв. саж. Принявъ прямую CG за основаніе этого треугольника, вы опредѣлите длину CG по масштабу; пусть она равна 116 саж. Чтобы найти высоту этого треугольника, помножьте 1982 на 2 (§ 109) и найденное число 3964 раздѣлите на 116 (получите 34). Къ прямой CG изъ точки C возставьте перпендикуляръ, и на немъ отъ C до *a* отложите 34 саж. Чрезъ точку *a* проведите прямую *a*Z параллельно къ прямой CG до точки Z пересѣченія съ прямою CD, и соедините точки G съ Z прямою GZ.

§ 162. *Четыреугольный участокъ ABCD раздѣлить на три равныя части, приблизительно подобныя четыреугольнику ABCD* (фиг. 225).

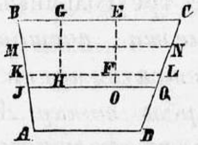
фиг. 225.



Проведя діагональ BD, опустите на не перпендикуляры: 1-ый изъ точки A и 2-ой изъ точки C. По масштабу плана вы узнаете, что прямая BD равна 269 саж., 1-й перпендикуляръ = 116 саж. и второй = 146 саж. Площадь треугольника DBC содержитъ 19637 квад. саж., площадь треугольника ADB = 15602 квад. саж. и площадь четыреугольника ABCD = 35239 кв. саж.; третья часть площади ABCD равна 11746$^1/_3$ кв. саж. Прямую BC раздѣлите на три равныя части въ точкахъ G и L, и проведите прямую LD. Изъ точки C вы опустите перпендикуляръ CK на прямую LD и по масштабу плана узнаете, что прямая LD равна 237 саж. и перпендикуляръ CK равенъ 56 саженямъ. Такъ какъ площадь треугольника CLD равна 6636 квадратнымъ саженямъ, то вы къ ней придадите такой треугольникъ, коего площадь должна равняться 5110$^1/_3$ квадратной сажени (11746$^1/_3$ квад. саж. безъ 6636 квадр. саж.). Помножьте 5110$^1/_3$ на 2 и найденное число 10220$^2/_3$ квадр. саж. раздѣлите на 237 (LD) — узнаете, что высота этого придаточнаго треугольника должна равняться почти 43 саж. Изъ точки D къ прямой LD возставьте перпендикуляръ и на немъ отложите 43 саж. Чрезъ полученную точку этого перпендикуляра проведите прямую параллельно къ прямой LD до точки H пересѣченія съ стороною AD, и соедините точки L и H прямою LH. Образовавшійся четыреугольникъ CDHL содержитъ 11746$^1/_3$ квадратной сажени. Точно такимъ-же образомъ вы получите точку E и прямую GE, которою опредѣляется площадь ABGE, равная 11746$^1/_3$ квадратной сажени.

§ 163. *Отъ пашни, начерченной на планѣ въ видѣ трапеціи ABCD (фиг. 226), требуется отрѣзать часть, содержащую три десятины, прямою параллельною къ сторонамъ AD и BC.*

фиг. 226.

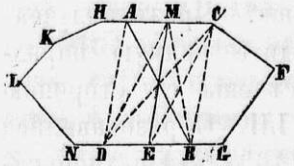


По масштабу плана вы узнаете, что сторона BC содержитъ 160 саж., AD = 100 саж. и высота трапеціи равна 78 саж. Раздѣлите 7200 кв. саж. (3 десят.) на 160 (получите 45 саж.). Къ прямой BC изъ точекъ E и G возставьте перпендикуляры и на нихъ отъ E до F и отъ G до H отложите по 45 саж. Чрезъ точки F и H проведите прямую KL. Прямую BK раздѣлите въ точкѣ M по-поламъ и чрезъ эту точку параллельно къ прямой BC проведите прямую MN. По масштабу вы узнаете, что прямая MN содержитъ 142 саж. Раздѣлите 7200 на 142 (получите почти 51 саж.). Отъ E до O отложите 51 саж. и чрезъ точку O проведите прямую JQ параллельно къ AB; тогда площадь BCQJ содержитъ 3 десятины. (Почему?)

§ 164. *Между участками ABGFCA и ABNLKHA проложена межа AB (фиг. 227). Требуется ее замѣнить межою, проходящею чрезъ точку M, не измѣняя поверхностнаго содержанія участковъ.*

Соединивъ точки B и C прямою BC, проведите прямую

фиг. 227.

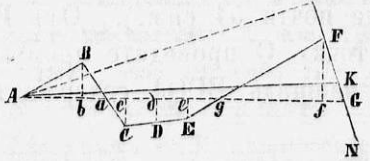


AD чрезъ точку A параллельно къ BC, и соедините точки C и D прямою CD. Потомъ соедините точки M и D прямою MD и чрезъ точку C проведите прямую CE параллельно къ MD. Наконецъ соедините точки M и E прямою ME. Треугольникъ ABC равномѣренъ треугольнику DBC, потому-что у нихъ общее основаніе BC и равныя высоты (почему?). Отъ этихъ треугольниковъ отнимите ихъ общую часть — получите равные остатки. Треугольникъ MCE равномѣренъ треугольнику DCE, потому-что у нихъ общее основаніе CE и равныя высоты. Отъ этихъ равномѣрныхъ треугольниковъ отнимите ихъ общую часть — получите равные остатки. Наконецъ отнимите вторые остатки отъ первыхъ — получите опять равные остатки; слѣдовательно замѣняя межу AB межою ME; вы прибавляете къ лѣвому участку треугольникъ и отнимаете отъ него такой-же треугольникъ.

Между двумя участками проведена межа, составляющая ломанную линію ABCDEF. Требуется замѣнить эту межу прямою линіею, проведенною чрезъ точку A, не измѣняя поверхностнаго содержанія обоихъ участковъ. Найти разстояніе точки F отъ точки пересѣченія новой межи съ межою HN (фиг. 228).

Чрезъ точку A проведите какую-нибудь прямую AG

фиг. 228.



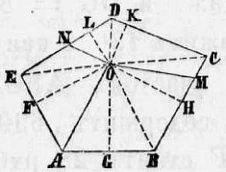
такимъ образомъ, чтобы площади AB*a* и FG*g*, принадлежащія первому участку, приблизительно равнялись площади *a*CDE*g*, принадлежащей второму участку. Изъ точекъ B, C, D, E, F вы опустите перпендикуляры B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, F*f* на прямую AG, и по масштабу плана узнаете, что прямая A*a* равна 105 саж., B*b* = 46 саж., *ac* = 7 саж., C*c* = 20 саж., *cd* = 37 саж., *d*D = 50 саж., *de* = 48 саж., *e*E = 23 саж., *eg* = 20 саж., G*g* = 72 саж. и F*f* = 55 саж.

Площадь треугольника AB*a* содержитъ 2415 кв. саж., площадь треугольника FG*g* = 1980 кв. саж., площадь треугольника *ac*C = 70 кв. саж., площадь трапеціи CD*dc* = 1295 кв. саж., площадь трапеціи DE*ed* = 1752 кв. саж. и площадь треугольника E*eg* = 230 квад. саж. Отъ перваго участка вы отрѣзали 2415 и 1980, или 4395 кв. саж., а отъ втораго участка 70, 1295, 1752 и 230, или 3347 кв. саж. Разность 4395 безъ 3347 составляетъ 1048 кв. саж., а ея половина 524 кв. саж.; слѣдовательно къ первому участку должно прибавить, а отъ втораго отнять 524 кв. саж. Для этого вы опустите перпендикуляръ AH на прямую HN и по масштабу плана узнаете, что прямая AH содержитъ 265 саж. Помножьте 524 на 2 и найденное число раздѣлите на 265 — вы узнаете, что основаніе треугольника, коего высота AH и площадь равна 524 кв. саж., должно равняться почти 4 саж. Отъ G до K отложите по масштабу 4 саж. и соедините точки A и K прямою AK. Наконецъ по масштабу вы найдете, что прямая FK равна 35 саж.

§ 165. *Участокъ, изображенный на планѣ въ видѣ многоугольника ABCDE, требуется раздѣлить на три равныя части изъ точки O, находящейся внутри многоугольника* (фиг. 229).

Изъ точки O на стороны AB, BC, CD, DE, AE опу-

фиг. 229.

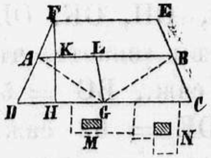


стите перпендикуляры OG, OH, OK, OL, OF. По масштабу плана вы узнаете, что прямая AB содержитъ 64 саж., BC = 50 саж., CD = 67 саж., DE = 62 саж., AE = 60 саж., OG = 33 саж., OH = 43 саж., OK = 32 саж., OL = 37 саж. и OF = 41 саж. Площадь ABO равна 1056 кв. саж., BCO = 1075 кв. саж., CDO = 1072 кв. саж., DEO = 1147 кв. саж., AEO = 1230 кв. саж. и площадь ABCDE = 5580 кв. саж. Третья часть этого многоугольника содержитъ 1860 кв. саж. Къ треугольнику ABO вы должны прибавить 1860 безъ 1056, или 804 кв.

саж. Помноживъ 804 на 2, вы раздѣлите найденное число 1608 на 43 (прямую OH) — узнаете, что основаніе треугольника, коего высота OH и площадь содержитъ 804 кв. саж., должно равняться почти $37^{1}/_{2}$ саж. Отъ B до M отложивъ $37^{1}/_{2}$ саж., соедините точки O и M прямою OM. Къ треугольнику AEO вы должны придать 1860 безъ 1230, или 630 квад. саж. Помноживъ 630 на 2, вы раздѣлите найденное число 1260 на 37 (прямую OL) — получите для основанія треугольника, коего высота равна OL и площадь содержитъ 630 квад. саж., почти 34 саж. Отъ E до N отложивъ 34 сажени, соедините точки O и N прямою ON.

§ 166. *Поле, имѣющее видъ трапеціи CDFE, раздѣлено на двѣ части прямаю AB параллельно къ сторонѣ CD (фиг. 230). Поле ABCD, въ которомъ десятина оцѣнена въ 12 руб. 80 коп., принадлежитъ крестьянскому двору M, а поле ABEF, котораго десятина стоитъ 10 руб., принадлежитъ крестьянскому двору N. Требуется раздѣлить поле CDFE изъ точки G на два равные участка, лежащіе непосредственно за соотвѣтствующими имъ дворами. На планѣ найти направленіе линіи раздѣла.*

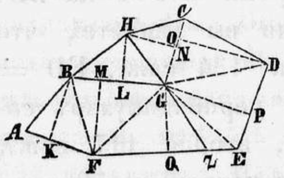
фиг. 230.



По составленному плану вы узнаете, что прямая CD содержитъ 229 саж., EF = 115 саж., AB = 161 саж., перпендикуляръ FH, опущенный изъ точки F на прямую CD, равенъ 120 саж., FK = 50 саж. и DG = 84 саж. Площадь ABCD содержитъ 13650 квад. саж. или $5^{11}/_{16}$ дес. и участокъ ABCD стоитъ 72 руб. 80 коп. Площадь ABEF содержитъ 6900 квад. саж. или $2^{7}/_{8}$ дес. и участокъ ABEF стоитъ 28 руб. 75 коп. Отъ участка ABCD должно отрѣзать полосу, которая стоитъ 22 руб. $2^{1}/_{2}$ коп. (потому-что поле ABCD дороже поля ABEF — 44 руб. 5 коп.). Для этого вы соедините точки A и G прямою AG. Площадь треугольника ADG равна 2940 квад. саж. или $1^{9}/_{40}$ десят. и участокъ ADG стоитъ 15 руб. 68 коп. Къ площади ADG вы должны придать полосу, цѣною въ 6 руб. $34^{1}/_{2}$ коп. (22 руб. $2^{1}/_{2}$ коп. безъ 15 руб. 68 коп.). Сколько квадратныхъ сажень стоятъ 6 руб. $34^{1}/_{2}$ коп., когда 2400 кв. саж. оцѣнены въ 12 руб. 80 коп.? — Получите $1189^{11}/_{16}$ квад. саж. Помноживъ $1189^{11}/_{16}$ на 2, вы найденное число $2379^{3}/_{8}$ раздѣлите на 70 (на высоту KH) — получите почти 34 саж. Отъ A до L отложите 34 саж. и соедините точки L и G прямою LG — получите треугольникъ ALG, коего площадь содержитъ $1189^{11}/_{16}$ кв. саж. Цѣна пашни BCGL равна цѣнѣ пашень ABEF и ADGL.

§ 167. *Участокъ ABHCDEF (фиг. 231) раздѣленъ линіею FGH на двѣ части такъ, что десятина части ABHGF стоитъ 9 рублей, а десятина части FGHCDE — 14 руб. 40 коп. Требуется раздѣлить участокъ ABHCDEF на двѣ равныя по цѣнности части линіею, проходящею чрезъ точку B.*

фиг. 231.

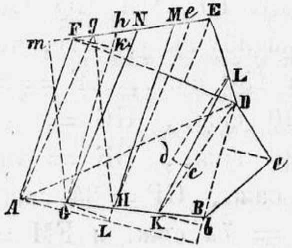


На планѣ проведите прямыя BF, BG, HG, CG, DG, EG и перпендикуляры BK, HL, FM, GQ, GP, DO, HN. По масштабу вы узнаете, что прямая FE равна 150 саж., AF = 96 саж., ED = 140 саж., GC = 105 саж., BG = 120 саж., BK = 146 саж., GQ = 79 саж., GP = 84 саж., DO = 65 саж., HN = 37 саж., HL = 72 саж. и FM = 110 саж. Площадь ABF равна 7008 кв. саж., BFG = 6600 кв. саж., EFG = 5925 кв. саж., DEG = 5880 кв. саж., CDG = $3412^{1}/_{2}$ кв. саж., CGH = $1942^{1}/_{2}$ кв. саж., BGH = 4320 кв. саж. Площадь ABHGF содержитъ 17928 квад. саж. ($7^{47}/_{100}$ десят.), а площадь FGHCDE = 17160 квадр. саж. ($7^{3}/_{20}$ десят.). Участокъ ABHGF стоитъ 67 руб. 23 коп., а участокъ FGHCDE — 102 руб. 96 коп. Цѣна всего участка ABCDEF равна 170 руб. 19 коп., а его половина 85 руб. $9^{1}/_{2}$ коп. Примите прямую BG за межу и раздѣлите 85 руб. $9^{1}/_{2}$ коп. на 14 руб. 40 коп. (получите $5^{291}/_{320}$ десят. или $14182^{1}/_{2}$ квад. саж. дорогой земли). Площади

EDG, CDG и CGH составляютъ 11235 квад. саж. Къ 11235 квад. саж. вы должны придать $2947^{1}/_{2}$ квад. саж., чтобы получить $14182^{1}/_{2}$ квад. саж. Помноживъ $2947^{1}/_{2}$ на 2, вы раздѣлите найденное число на 79 (на высоту GQ) — получите для основанія треугольника, коего площадь содержитъ $2947^{1}/_{2}$ кв. саж. и высота равна GQ, почти $74^{1}/_{2}$ саж. Отъ E до Z отложите $74^{1}/_{2}$ саж. и соедините точки G и Z прямою GZ. Межою BGZ участокъ ABCDEF раздѣлится на двѣ равныя по цѣнности части.

§ 168. *Участокъ ABCDEF (фиг. 232) раздѣлить на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ точки G, H, K прямой AB. По плану извѣстно, что разстояніе AG равно 38 саж., GH = 53 саж., HK = 36 саж. и KB = 28 саж.*

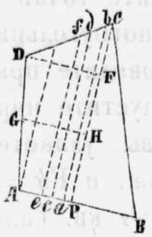
фиг. 232.



На планѣ проведите діагонали BD, AD, FD и опустите перпендикуляры: первый изъ E на FD, второй изъ A на FD, третій изъ A на BD, четвертый изъ C на BD. По масштабу плана вы узнаете, что прямая BD равна 134 саж., FD = 162 саж., первый перпендикуляръ содержитъ 79 саж., второй 117 саж., третій 150 саж. и четвертый 70 саж. Площадь BCD равна 4690 кв. саж., DEF = 6399 кв. саж., ADF = 9477 кв. саж. и ABD = 10050 квад. саж. Площадь ABCDEF содержитъ 30616 кв. саж., а ея четвертая часть равна 7654 квад. саж. Соедините точки K и D прямою KD и изъ точки K опустите перпендикуляръ K*b* на прямую BD. По масштабу плана вы узнаете, что прямая K*b* равна 29 саж., KD = 131 саж. Площадь BKD содержитъ 1943 кв. саж., а площадь BCDK = 4690 и 1943, или 6633 кв. саж. Къ площади BCDK вы должны придать 1021 квад. саж., чтобы получить 7654 квад. саж. Помноживъ 1021 на 2, вы раздѣлите найденное число 2042 на 131 (прямую KD) — получите почти 15 саж. Изъ какой-нибудь точки *c* прямой KD возставьте перпендикуляръ и на немъ отложите 15 саж. отъ *c* до *d*; чрезъ точку *d* проведя прямую *d*L параллельно къ KD, соедините точки L и K прямою LK. Первая часть изобразится многоугольникомъ BCDLK. Для полученія второй части проведите прямую G*h* параллельно къ AF и изъ точки F опустите перпендикуляръ F*k* на G*h*. По масштабу плана вы узнаете, что прямая AF равна 120 саж., G*h* = 145 саж. и F*k* = 37 саж. Площадь трапеціи FAG*h* равна $4902^{1}/_{2}$ кв. саж. Къ этой площади вы должны придать $2751^{1}/_{2}$ квад. саж., чтобы получить 7654 кв. саж. Изъ точки G опустите перпендикуляръ G*m* на продолженіе прямой EF; по масштабу вы узнаете, что прямая G*m* равна 137 саж. Помноживъ $2751^{1}/_{2}$ на 2, вы раздѣлите найденное число 5503 на 137 (получите почти 40 саж.). Отъ *h* до N отложите 40 саж. и соедините точки G и N прямою GN. Для полученія третьей части вы проведете чрезъ точку H прямую H*e* параллельно къ GN и изъ точки G на прямую H*e* опустите перпендикуляръ GL. По масштабу вы узнаете, что прямая GN равна 170 саж., H*e* = 197 саж. и GL = 51 саж. Площадь NGH*e* содержитъ $9358^{1}/_{2}$ кв. саж. Отъ этой площади вы должны отрѣзать $1704^{1}/_{2}$ квад. саж., чтобы получить 7654 квад. саж. Изъ точки H опустите перпендикуляръ H*g* на прямую EF. По масштабу вы узнаете, что прямая H*g* содержитъ 170 саж. Помножьте $1704^{1}/_{2}$ на 2 и найденное число 3409 раздѣлите на 170 (получите почти 20). Отъ *e* до M отложите 20 саж. и соедините точки M и H прямою MH.

§ 169. *Участокъ ABCD (фиг. 233) состоитъ изъ четырехъ частей CDF, DFHG, APHG и BCP. Прямая CP перпендикулярна, а прямыя DF и GH параллельны къ AB. Квадратная сажень части CDF стоитъ 4 рубля, части DFHG — $2^{1}/_{2}$ рубля, части APHG — 5 рублей и части BCP — 2 рубля. Требуется раздѣлить этотъ участокъ на четыре равныя по цѣнности части прямыми, перпендикулярными къ AB.*

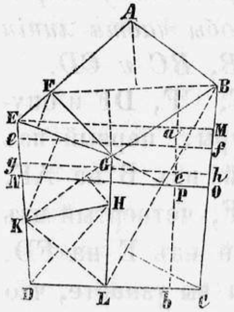
фиг. 233.



По масштабу плана вы узнаете, что прямая AB содержитъ 185 саж., AP = 86 саж., PH = 61 саж., HF = 76 саж., CF = 60 саж., DF = 126 саж. и GH = 104 саж. Площадь треугольника CDF содержитъ 3780 квад. саж. и стоитъ 15120 руб., трапеція DFHG содержитъ 8740 квад. саж. и стоитъ 21850 руб., трапеція APHG содержитъ 5795 квад. саж. и стоитъ 28975 руб., треугольникъ BCP содержитъ $9751^1/_2$ квад. саж. и стоитъ 19503 руб. Весь участокъ стоитъ 85448 руб., а его четвертая часть 21362 руб. Къ треугольнику BCP вы должны придать часть, стоящую 21362 безъ 19503 руб., или 1859 руб. Эта часть выразится трапеціею, у которой основаніе CP содержитъ 197 саж. Высота этой трапеціи найдется слѣдующимъ образомъ: помножьте 60 саж., содержащихся въ прямой CF, на цѣну квадратной сажени части CDF; потомъ вы помножите 76 саж., содержащихся въ прямой FH, на цѣну квадратной сажени части DFHG; наконецъ вы помножите 61 саж. прямой HP на цѣну квад. сажени части APHG (получите 240, 190 и 305, или вмѣстѣ 735 саж.) Раздѣлите 1859 на 735 (получите почти $2^1/_2$ саж.); на прямой AB отъ P до *a* отложите $2^1/_2$ саж. и чрезъ *a* проведите прямую *ab* параллельно къ PC. Для повѣрки вычислите цѣнность площади *ab*CP (получите $1832^1/_2$ руб.). Это число показываетъ, что прямая *ab* невѣрна, и что къ трапеціи *ab*CP должно придать площадь, стоящую $26^1/_2$ руб. Раздѣлите $26^1/_2$ на 735 (получите $1^3/_5$ вершка); слѣдовательно на мѣстности отъ P до *a* должно отмѣрить 2 саж. 1 ар. $9^3/_5$ вершк. Вторая часть, стоящая 21362 руб., изобразится то-же трапеціею, у которой основаніе содержитъ 59, 76 и 61, или 196 саж. Чтобы найти высоту этой трапеціи, помножьте 59 на 4, 76 на $2^1/_2$, 61 на 5, и сложите найденныя числа (получите 731). Раздѣливъ 21362 на 731, вы получите почти 29 саж. Отъ *a* до *c* отложите 29 саж. и чрезъ *c* проведите прямую *cd* параллельно къ CP. Для повѣрки вычислите цѣнность площади *abdc* (получите 20416 руб.). Это число показываетъ, что къ трапеціи *abdc* вы должны придать площадь, стоящую 21362 безъ 20416, или 946 руб. По масштабу вы узнаете, что основаніе этой площади содержитъ $45^1/_2$, 76 и 61, или $182^1/_2$ саж. Помножьте $45^1/_2$ на 4, 76 на $2^1/_2$, 61 на 5 (получите 182, 190, 305, или вмѣстѣ 677). Раздѣливъ 946 на 677, вы получите почти $1^1/_3$ саж. Отъ *c* до *e* отложите $1^1/_3$ саж. и чрезъ точку *e* проведите прямую *ef* параллельно къ PC.

§ 170. *Участокъ ABCDE, состоящій изъ четырехъ частей ABGF, BCLG, DKHL и EFGHK (фиг. 234), принадлежитъ двумъ владѣльцамъ: первому части ABGF и DKHL, а второму части BCLG и EFGHK. Требуется раздѣлить участокъ на двѣ равныя части прямою параллельною къ CD.*

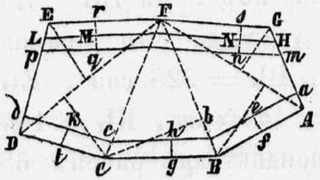
фиг. 234.



На планѣ проведите діагонали BF, BL, EG, KG и KL и опустите перпендикуляры: первый изъ A на BF, второй изъ G на BF, третій изъ G на BL, четвертый изъ C на BL, пятый изъ D на KL, шестой изъ H на KL, седьмой изъ H на KG, восьмой изъ K на EG, девятый изъ F на EG. По масштабу плана вы узнаете, что прямая BF равна 166 саж., BL = 228 саж., EG = 137 саж., KG = 141 саж., KL = 144 саж. первый перпендикуляръ равенъ 68 саж., второй = 50 саж., третій = 50 саж., четвертый = 78 саж., пятый = 64 саж., шестой = 75 саж., седьмой = 55 саж., восьмой = 57 саж. и девятый = 50 саж. Площадь ABF содержитъ 5644 кв. саж., BFG = 4150 кв. саж., BGL = 5700 кв. саж., BCL = 8892 кв. саж., DKL = 4608 кв. саж., HKL = 5400 кв. саж., HKG = $3877^1/_2$ кв. саж., KEG = $3904^1/_2$ кв. саж., FEG = 3425 кв. саж., площадь ABCDE = 45601 кв. саж. и ея половина = $22800^1/_2$ квад. саж. Чрезъ точку E проведя прямую EM параллельно къ CD, вычислите площадь трапеціи CDEM. Для этого изъ какой-нибудь точки a прямой EM вы опустите перпендикуляръ ab на прямую CD и по масштабу узнаете, что прямая EM равна 213 саж., CD = 180 саж. и ab = 154 саж. Площадь CDEM содержитъ 30261 квадр. саж. Отъ этой площади отрѣжьте трапецію, содержащую 30261 безъ $22800^{1}/_{2}$, или $7460^{1}/_{2}$ квад. саж. По масштабу извѣстно, что прямая EM равна 213 саж. Раздѣлите $7460^{1}/_{2}$ на 213 (получите 35 саж.). Отъ a до c отложите 35 саж., и чрезъ точку c проведите прямую gh параллельно къ EM. Прямую Mh раздѣлите въ точкѣ f по-поламъ и параллельно къ прямой EM проведите прямую ef чрезъ точку f. По масштабу вы узнаете, что прямая ef содержитъ 208 саж. Раздѣлите $7460^{1}/_{2}$ на 208 (получите почти 36 саж.). Отъ a до P отложите 36 саж. и чрезъ точку P проведите прямую NO параллельно къ EM.

§ 171. *Отъ участка ABCDEFG (фиг. 235) отрѣзать пятую часть такимъ образомъ, чтобы части линіи раздѣла были параллельны къ прямымъ AB, BC и CD.*

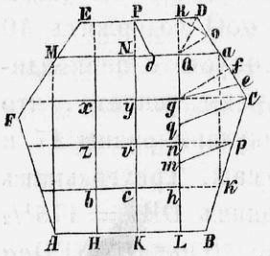
фиг. 235.



На планѣ проведите діагонали AF, BF, CF, DF и опустите перпендикуляры: первый изъ G на AF, второй изъ B на AF, третій изъ C на BF, четвертый изъ C на FD и пятый изъ E на FD. По масштабу плана вы узнаете, что прямая AF равна 175 саж., BF = 210 саж., CF = 210 саж., FD = 224 саж., AB = 120 саж., BC = 138 саж., CD = 85 саж., первый перпендикуляръ равенъ 78 саж., второй = 110 саж., третій = 109 саж., четвертый = 78 саж., пятый = 57 саж. Площадь треугольника GAF равна 6825 кв. саж., BAF = 9625 кв. саж., BCF = 11445 кв. саж., CFD = 8736 кв. саж., EFD = 6384 кв. саж., площадь ABCDEFG = 43015 и ея пятая часть равна 8603 квад. саж. Прямыя AB, BC и CD содержатъ 343 саж. Раздѣлите 8603 на 343 (получите почти 25 саж.). Къ прямымъ AB, BC, CD возставьте перпендикуляры и на нихъ отложите по 25 саж. отъ f до e, отъ g до h, и отъ l до k. Проведите прямыя: ab чрезъ e параллельно къ AB, bc чрезъ h параллельно къ BC, cd чрезъ k параллельно къ CD. Для повѣрки работы измѣрьте по масштабу прямыя ab, bc и cd; прямая ab равна 119 саж., bc = 130 саж. и cd = 91 саж., а прямыя ab, bc и cd вмѣстѣ составляютъ 340 саж. Сложите 343 и 340 и найденное число раздѣлите на 2 (получите $341^{1}/_{2}$). Площадь 8603 раздѣлите на $341^{1}/_{2}$ (получите почти 25 саж.). Откуда слѣдуетъ, что нанесенныя прямыя ef, gh, kl достаточно вѣрны.

§ 172. *Пашню ABCDEF нарѣзать на десятины.*

фиг. 236.

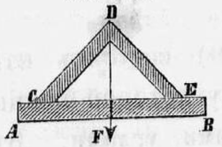


Въ большомъ по возможности масштабѣ составьте планъ пашни. На этомъ планѣ (фиг. 236) по масштабу отложите на прямой AB части AH, HK и KL, равныя по 40 саж. и къ прямой AB изъ точекъ A, H, K и L возставьте перпендикуляры. На длиннѣйшемъ перпендикулярѣ KP отложите части Kc, cv, vy, yN, равныя по масштабу 60 саж., и чрезъ точки c, v, y, N проведите прямыя параллельно къ прямой AB; тогда на планѣ образуется 11 равныхъ прямоугольниковъ, содержащихъ каждый 2400 квад. саж., или одну десятину. По масштабу плана вы узнаете, что въ трапеціи LBpn сторона LB равна 6 саж., прямая nL = 120 саж. и сторона pn = 41 саж. Площадь LBpn содержитъ 2820 квад. саж. Отъ этой площади вы должны отрѣзать 420 кв. саж., чтобы получить 2400 квад. саж. Помноживъ 420 на 2, вы раздѣлите найденное число на 41 (на прямую pn) — получите $20^{1}/_{2}$ саж. Отъ n до m отложите $20^{1}/_{2}$ саж. и соедините точки m и p прямою mp. Въ трапеціи npCg сторона Cg равна 56 саж. Площадь этой трапеціи равна 2910 квад. саж. и площадь четыреугольника Cpmg содержитъ 2910 и 420, или 3330 кв. саж. Отъ этого четыреугольника вы должны отрѣзать 930 квад. саж., чтобы получить 2400 квад. саж. Помноживъ 930 на 2, вы раздѣлите найденное число на 56 (на прямую Cg) — получите почти 33 саж. Отъ g до q отложите 33 саж. и соедините точки C и q прямою Cq. Площадь трапеціи $CgQa$ равна 2760 квад. саж., потому-что въ прямой Qa — 36 саж.; площадь четыреугольника $aQqC$ содержитъ 2760 и 930, или 3690 квад. саж. Къ треугольнику Cgq вы должны придать 1470 квад. саж., чтобы получить 2400 квад. саж. Для этого вы опустите перпендикуляръ gf на прямую CD и по масштабу узнаете, что длина gf равна 98 саж. Помножьте 1470 на 2 и раздѣлите найденное число на 98 (получите 30 саж.). Отъ C до e отложите 30 саж. и соедините точки e и g прямою eg. Четыреугольникъ $aegQ$ содержитъ 1290 кв. саж.; къ нему вы должны прибавить 1110 кв. саж., чтобы получить 2400 кв. саж. Треугольникъ aoQ содержитъ 40 квад. саж. Проведя прямую Ro, на нее опустите перпендикуляры изъ точекъ Q и D. По масштабу вы узнаете, что прямая Ro содержитъ 27 саж, перпендикуляры равны 17 и 13 саж., прямая $RQ=22$ саж. и $PN=18$ саж. Треугольникъ RQo содержитъ $229\frac{1}{2}$ кв. саж., треугольникъ $DRo = 175\frac{1}{2}$ кв. саж. и трапеція $NPRQ = 800$ кв. саж. Площадь $NPDoa$ составляетъ съ площадью $aegQ$ — 2535 квад. саж. Отъ 2535 кв. саж. вы должны отрѣзать 135 квад. саж., чтобы составилось 2400 кв. саж. Для этого помножьте 135 на 2, и найденное число раздѣлите на 18 (на прямую NP) — получите 15. Отъ точки N до d отложите 15 саж. и соедините точки P и d прямою Pd и т. д.

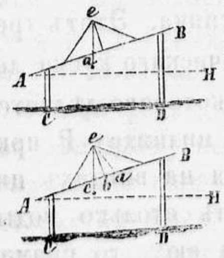
По прямой AB на мѣстности отмѣрьте цѣпью части AH, HK и KL, содержащія по 40 саж. Къ этой-же прямой изъ точекъ A, H, K, L возставьте эккеромъ перпендикуляры и на прямой KP отмѣрьте по 60 сажень отъ K до c, отъ c до v, отъ v до y, отъ y до N. Къ прямой KP изъ точекъ c, v, y, N возставьте перпендикуляры и продолжьте ихъ въ обѣ стороны. На этихъ перпендикулярахъ отмѣрьте части cb, ch, vz, vn, yg, yx и т. д., содержащія по 40 саж. Въ точкахъ b, c, h, n, v, x, g, N и т. д. поставьте колья. По масштабу плана вы узнаете, что прямая Bp равна 140 саж., $Lm = 99\frac{1}{2}$ саж., $nq = 27$ саж., $Cp = 75$ саж. и т. д. На мѣстности по направленію BC отмѣрьте 140 саж. отъ B до p (или отъ C до p — 75 саж.). По направленію прямой LR отмѣрьте $99\frac{1}{2}$ саж. отъ L до m, и 27 саж. отъ n до q. По направленію CD отмѣрьте 30 саж. отъ C до e, и 61 саж. по направленоію aN отъ a до d и т. д. Въ точкахъ m, e, p, q, d и т. д. поставьте колья съ навязками изъ соломы.

§ 173. Нивеллированіе. Чтобы узнать, на сколько точка A на мѣстности выше точки B, или точка B ниже точки A, производится дѣйствіе, которое называется *нивелировкою* или *нивеллированіемъ*. Для этого дѣйствія употребляются инструменты различнаго устройства; простѣйшіе изъ нихъ суть *ватерпасъ* и *водяной уровень*.

Фиг. 237.

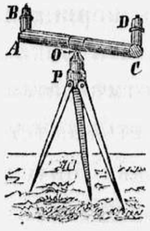


Фиг. 238.



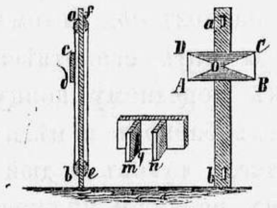
Ватерпасъ состоитъ изъ горизонтальнаго бруса AB (фиг. 237), длиною отъ $^1/_2$ до 1 сажени; на его боковой поверхности означены черточками футы и дюймы. Къ нему прикрѣплены два бруса CD и ED равной длины такимъ образомъ, чтобы они съ нижнимъ брусомъ составили равнобедренный треугольникъ CDE; въ вершинѣ этого треугольника прикрѣплена нить съ отвѣсомъ. На боковой поверхности нижняго бруса отмѣчается черта слѣдующимъ образомъ: втыкаются въ землю совершенно отвѣсно два бруса C и D (фиг. 238) и на нихъ ставится ватерпасъ горизональнымъ брусомъ AB. Потомъ карандашемъ проводится черта на боковой поверхности бруса AB тамъ, гдѣ пришлась нить отвѣса. Послѣ этого переставляется ватерпасъ такъ, чтобы его конецъ B пришелся на брусѣ C, а конецъ A на брусѣ D, и отмѣчается чертою *c* положеніе нити отвѣса. Наконецъ разстояніе между проведенными чертами *a* и *c* раздѣляется по-поламъ и проводится средняя черта *b*. Если теперь поднять брусъ C или опустить брусъ D на столько, чтобы нить покрыла черту *b*, то нить будетъ перпендикулярна къ нижней поверхности бруса AB, или эта поверхность будетъ *горизонтальна*. Почему? Брусъ AB составляетъ съ горизонтальною прямою AH уголъ BH при первомъ положеніи ватерпаса; этотъ уголъ равенъ углу ABH, составляемому брусомъ AB съ горизонтальною прямою AH при второмъ положеніи ватерпаса. Такъ какъ нить отвѣса перпендикулярна къ горизонтальнымъ прямымъ AH и BH, то уг. $eaB +$ уг. $BAH = 90^0$ и уг. $ecA +$ уг. $ABH = 90^0$; откуда вы заключаете, что уг. $eaB =$ уг. ecA. По равенству этихъ угловъ слѣдуетъ, что треугольникъ *aec* равнобедренный, въ которомъ, какъ извѣстно (§ 27), прямая *eb*, проходящая чрезъ средину *b* стороны *ca*, должна быть перпендикулярна къ *ca*; слѣдовательно, когда нить отвѣса закрываетъ черту *b*, тогда брусъ AB находится въ горизонтальномъ положеніи.

фиг. 239.



§ 174. *Водяной уровень* (фиг. 239) состоитъ изъ мѣдной или жестяной трубки, у которой концы AB и CD загнуты подъ прямыми углами. Въ этихъ загнутыхъ частяхъ трубки вставлены стеклянные цилиндры. Въ срединѣ трубки AC снизу припаена трубочка O, которою инструментъ насаживается на цилиндръ P треножника. Этотъ треножникъ состоитъ изъ цилиндрическаго куска дерева P, діаметръ верхней части котораго дѣлается нѣсколько менѣе діаметра трубочки O. Къ цилиндру P привинчаны три ножки, свободно вращающіяся на винтахъ цилиндра P. Если въ трубку BACD налить столько воды, чтобы и стеклянные цилиндры были заняты ею, то прямая линія, умственно проведенная чрезъ верхнюю поверхность воды въ цилиндрахъ, будетъ горизонтальна. При переноскѣ инструмента стеклянные цилиндры затыкаются пробками, а во время работы выпускается воздухъ, проникшій въ трубку BACD. Для этого, вынувъ одну изъ пробокъ, наклоняютъ весь инструментъ, чтобы вода перешла въ заткнутый цилиндръ; потомъ осторожно наклоняютъ инструментъ въ противную сторону такъ, чтобы вода перешла въ открытый цилиндръ, который послѣ этого опять затыкается пробкою. Вода, налитая въ трубку BACD, должна быть подкрашена краскою или чернилами.

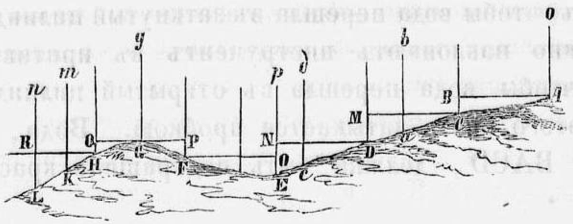
фиг. 240.



§ 175. *Рейка.* При нивеллировкѣ посредствомъ водянаго уровня употребляется четырегранный шестъ (фиг. 240), длиною въ $1^1/_2$ саж. и толщиною около дюйма; этотъ шестъ называется *рейкою*. Въ ней сдѣланы два продолговатыя отверстія *a* и *b*, въ которыхъ вращаются два блока на желѣзныхъ осяхъ, вдѣланныхъ въ самой рейкѣ; чрезъ эти блоки проходитъ шнуръ. На передней поверхности рейки означены черточками футы и дюймы. Къ шнуру рейки прикрѣплена дощечка ABCD, шириною въ 4 дюйма и длиною около 6 дюймовъ; эта дощечка называется *цѣлью* рейки. На передней поверхности цѣли проведены діагонали AC и BD; на ней треугольники AoB и CoD выкрашены черною, а треугольники AoD и BoC бѣлою краскою. Къ задней поверхности цѣли прикрѣплены двѣ планки *m* и *n* въ такомъ разстояніи одна отъ другой, чтобы цѣль могла свободно скользить вверхъ и внизъ по вертикально стоящей рейкѣ, когда нивеллирующій приведетъ шнуръ цѣли въ движеніе; но чтобы цѣль собственною тяжестью не могла опуститься внизъ, къ внутренней поверхности планки *m* придѣлана пружина, которою цѣль прижимается къ рейкѣ. На чертежѣ (фиг. 240) рейка представлена съ переди и съ боку; на боковомъ изображеніи, *af* и *be* суть блоки, чрезъ которые перекинутъ шнуръ *abefa*; *cd* — цѣль рейки.

§ 176. Чтобы на бумагѣ получить изображеніе неровностей по направленію линіи между двумя точками A и L (фиг. 241), поставьте сперва колья *ab*, *cd*, *Gg* *Km* въ точкахъ линіи AL, означенной кольями *Ao* и *Ln*.

фиг. 241.



Вынувъ колъ *Ao* изъ земли, поставьте ватерпасъ такимъ образомъ, чтобы его задній конецъ пришелся въ точку A и чтобы нижній брусъ былъ направленъ на колъ *ab*. Потомъ дайте ватерпасу такое положеніе, чтобы нить его отвѣса закрыла проведенную на брусѣ черту; къ переднему концу ватерпаса приставьте простую рейку (безъ блоковъ и цѣли) въ отвѣсномъ положеніи и отсчитайте число футовъ и дюймовъ, помѣстившихся между основаніемъ рейки и нижнею поверхностью горизонтальнаго бруса. Въ точкѣ C, гдѣ стояла рейка, вбивайте колышекъ въ землю. Потомъ поставьте ватерпасъ заднимъ концомъ на колышекъ C, приведите ватерпасъ въ горизонтальное положеніе, направьте его на колъ *cd* и къ переднему концу бруса приставьте рейку. Отсчитавъ высоту DM рейки, вбивайте колышекъ D въ землю. Точно такимъ-же образомъ вы найдете высоту EN рейки въ точкѣ E. Въ этой точкѣ поставьте отвѣсно колъ *Ep* и помѣстите ватерпасъ такимъ образомъ, чтобы, при горизонтальномъ положеніи его нижняго бруса, передній конецъ ватерпаса коснулся къ колу *Ep*, а задній конецъ уперся въ землю. Отсчитавъ высоту EO рейки, поставленной вмѣсто кола *Ep*, вы вобьете колышки въ точкахъ E и F. Въ точкѣ F поставьте отвѣно колъ, а ватерпасъ положите на землю въ точкѣ G такимъ образомъ, чтобы задній конецъ его нижняго бруса коснулся къ колу F. Приведя ватерпасъ въ горизонтальное положеніе, направьте его на колъ *Km* и приставьте рейку сперва къ заднему, а потомъ къ переднему концу нижняго бруса, чтобы получить высоты FP и HQ; отсчитайте горизонтальныя разстоянія PG и QG, и въ точкѣ H вбивайте колышекъ. Наконецъ поставивъ рейку въ точкѣ L, отсчитайте высоту LR рейки и по горизонтальному брусу ватерпаса горизонтальное разстояніе HR.

Станціи.		Длина станцій.	Пониженія.		Повышенія.	
Отъ	До		Футы.	Дюйм.	Футы.	Дюйм.
A	C	1 саж.	2	5	—	—
C	D	1 »	1	1	—	—
D	E	1 »	2	2	—	—
E	F	1 »	—	—	1	8
F	G	4 ф.	—	—	1	2
G	H	3 —	—	7	—	—
H	L	$5^3/_4$ —	2	5		
		5 саж. $5^3/_4$ ф.	8	8	2	10
			2	10		
			5	10		

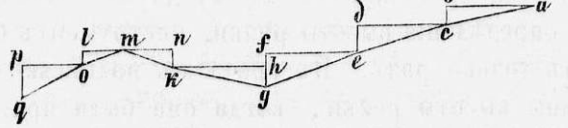
Измѣренныя на мѣстности линіи записываются въ особой таблицѣ, гдѣ надъ первою графою написано слово «станціи». *Станціею* называется промежутокъ между двумя точками A и C, когда, для опредѣленія высоты рейки, инструментъ былъ поставленъ одинъ только разъ. Въ графѣ съ надписью «пониженія» записаны высоты рейки, когда она была приставлена къ переднему концу ватерпаса. Числа, помѣщенныя въ графѣ съ надписью «повышенія», относятся къ высотамъ рейки, приставленной къ заднему концу ватерпаса.

По чертежу видно, что, для узнанія пониженія точки L относительно точки A, должно сложить числа, помѣщенныя въ графѣ съ надписью «пониженія» (получите 8 фут. 8 дюйм.); потомъ должно сложить числа, написанныя въ графѣ съ надписью «повышенія» (получите 2 фута 10 дюйм.), и наконецъ вы должны вычесть 2 фута 10 дюйм. изъ 8 фут. 8 дюйм. (получите 5 футовъ 10 дюймовъ).

§ 177. *Составленіе профили мѣстности.* Сперва начертите точно такой-же масштабъ, какой представленъ въ (фиг. 80), съ той только разницею, что на перпендикулярѣ AE вы отложите 12 равныхъ частей; тогда принявъ часть AC равною 1 футу, вы узнаете по предъидущему (§ 61), что часть *ab* равна $^{1}/_{12}$ прямой AC, т. е. часть *ab* равна $^{1}/_{12}$ фута, или $ab = 1$ дюйму; слѣдовательно $cd = 2$ дюйм., $ef =$ 3 дюйм., $gh = 4$ дюйм., $mn = 5$ дюйм. и т. д. По этому масштабу вы отложите длины, помѣщенныя въ таблицѣ (§ 176) въ графахъ съ надписями «пониженія» и «повышенія». Чтобы по тому-же самому масштабу откладывать длины станцій, вы принимаете часть AC (фиг. 80), равною 12 футамъ (или 24, или 36 футамъ); тогда *ab* соотвѣтствуетъ 1 футу (или 2, или 3 футамъ). Назовите масштабъ, по которому откладываются пониженія и повышенія, масштабомъ для вертикальныхъ линій, а масштабъ, по которому откладывается длина станцій — масштабомъ для горизонтальныхъ разстояній.

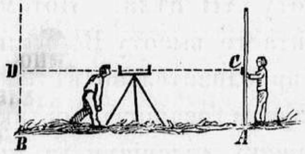
Проведите прямую параллельно къ верхнему краю листа бумаги и отложите на ней отъ *a* до *b* (фиг. 242) одну сажень по масштабу для горизонтальныхъ разстояній. Къ прямой *ab* изъ точки *b* возставьте перпендикуляръ внизъ (потому-что мѣстность понижается) и на немъ отъ *b* до *c* по масштабу для вертикальныхъ линій отложите 2 фута 5 дюймовъ (см. таблицу § 176). Чрезъ точку *c* проведите прямую параллельно къ *ba* и отъ *c* до *d* отложите 1 сажень. Изъ точки *d* къ прямой *dc* возставьте перпендикуляръ и на немъ отъ *d* до *e* отложите 1 футъ 1 дюймъ. Чрезъ точку *e* проведите прямую параллельно къ *ba* и на ней отложите 1 сажень отъ *e* до *f*. Изъ точки *f* къ прямой *fe* возставьте перпендикуляръ *fg*, длиною въ 2 фута 2 дюйма. На этомъ-же перпендикулярѣ отъ *g* до *h* вверхъ (потому-что мѣстность повышается) отложите 1 футъ 8 дюймовъ и чрезъ точку *h* проведите прямую параллельно къ *ba*; на этой прямой отложите 1 сажень отъ *h* до *k*. Къ прямой *kh* возставьте перпендикуляръ *kn*, длиною въ 1 футъ 2 дюйма, и чрезъ *n* проведите прямую параллельно къ *ba*. На ней отъ *n* до *m* отложите 4 фута и отъ *m* до *l* — 3 фута. Изъ точки *l* къ прямой *ln* возставьте перпендикуляръ *lo* внизъ, длиною въ 7 дюймовъ и т. д. Наконецъ проведите прямыя *ac*, *ce*, *eg*, *gk* и т. д. Образовавшаяся линія *acegktoq*, показывающая превышеніе однихъ точекъ мѣстности надъ другими, называется *профилью* мѣстности.

фиг. 242.

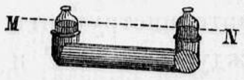


§ 178. Чтобы найти превышеніе точки B надъ точкою A (фиг. 243) съ помощію водянаго уровня, полагая, что разстояніе между этими точками не болѣе 20 саж., съемщикъ ставитъ инструментъ приблизительно въ срединѣ между точками A и B, а товарищъ съемщика помѣщаетъ рейку въ точкѣ A въ отвѣсномъ положеніи. Съемщикъ, направляя лучъ зрѣнія по касательной MN (фиг. 244) къ верхней поверхности воды въ стекляныхъ цилиндрахъ, подаетъ товарищу знаки, поднять или опустить цѣль рейки до тѣхъ поръ, пока съемщику покажется, что его лучъ зрѣнія пересѣкаетъ среднюю точку *o* цѣли (фиг. 240); послѣ этого съемщикъ приказываетъ товарищу отсчитать высоту цѣли. Для этого товарищъ замѣчаетъ, на какомъ дѣленіи рейки остановился нижній край цѣли. Если, напримѣръ онъ замѣтилъ 5 футъ 5 дюйм., то къ этому числу онъ долженъ придать еще 2 дюйма (половину ширины цѣли); тогда вся высота цѣли равна 5 фут. 7 дюйм. Потомъ товарищъ съемщика ставитъ рейку въ точкѣ B такъ, чтобы передняя

фиг. 243.

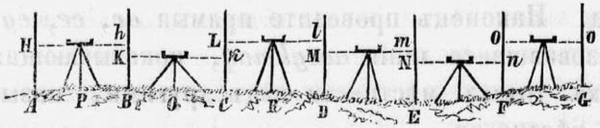


фиг. 244.



поверхность рейки была обращена къ инструменту. Съемщикъ, не трогая инструмента, направляетъ лучъ зрѣнія на рейку; товарищъ опять передвигаетъ цѣль до тѣхъ поръ, пока съемщикъ остановитъ ее. Предположите, что высота BD цѣли равна 5 фут. 3 дюйм. Чтобы узнать, на сколько точка A ниже точки B, вы должны вычесть 5 футъ 3 дюйм. изъ 5 фут. 7 дюйм. — получите 4 дюйма.

фиг. 245.



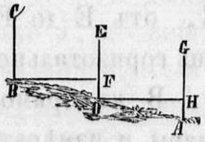
§ 179. Чтобы узнать, на сколько точка A (фиг. 245) выше или ниже точки G, когда разстояніе между этими точками значительно болѣе 20 саж., вы поставите въ точкахъ B, C, D, E, F и т. д. колья, отстоящіе одинъ отъ другаго не болѣе 20 саж. Приблизительно въ срединѣ P между точками A и B поставьте инструментъ, а въ точкѣ A помѣщайте товарища съ рейкою и, по предъидущему, отсчитайте высоту AH цѣли. Потомъ поставивъ рейку въ точкѣ B, вы отсчитаете высоту B*h* цѣли. Послѣ этого перенесите инструментъ приблизительно въ средину Q между точками B и C; въ это время товарищъ, остающійся въ точкѣ B, переворачиваетъ рейку дѣленіями къ инструменту. Отсчитавъ высоту BK цѣли, товарищъ ставитъ рейку въ точкѣ C дѣленіями къ инструменту, и отсчитаетъ здѣсь высоту C*k* цѣли. Потомъ вы переставите инструментъ въ точку R приблизительно въ средину между точками C и D, а товарищъ, остающійся въ точкѣ C, обращаетъ рейку дѣленіями къ инструменту и т. д.

Высоты AH, BK, CL и т. д., отсчитанныя на рейкахъ, когда вы направляли лучи зрѣнія на начальную точку A, называются *задними* высотами; а высоты B*h*, C*k*, D*l* и т. д., полученныя на рейкахъ, когда лучи зрѣнія были направлены на точку G, суть *переднія* высоты.

Станціи.		Длина станцій.	Высоты цѣли.		Повышенія.	Пониженія.
Отъ	До		Заднія.	Переднія.		
A	B	16 саж.	7 ф. 3 д.	5 ф. 8 д.	1 ф. 7 д.	—
B	C	13 »	4 » 2 »	7 » 4 »	—	3 ф. 2 д.
C	D	14 »	4 » 7 »	7 » 3 »	—	2 » 8 »
D	E	17 »	4 » 5 »	6 » 6 »	—	2 » 1 »
E	F	19 »	8 » 6 »	6 » 4 »	2 ф. 2 д.	—
F	G	15 »	8 » 8 »	6 » 3 »	2 » 5 »	—
		94 саж.			6 ф. 2 д.	7 ф. 11 д.
						6 » 2 д.
						1 ф. 9 д.

Полученныя измѣреніемъ числа вы запишете въ таблицѣ. Для станціи AB задняя высота цѣли болѣе передней высоты; слѣдовательно отъ A къ B мѣстность повышается. Чтобы найти это повышеніе, вычитайте 5 фут. 8 дюйм. изъ 7 фут. 3 дюйм. (получите 1 ф. 7 д.). Для станціи BC задняя высота цѣли менѣе передней высоты; слѣдовательно отъ B къ C мѣстность понижается. Это пониженіе составляетъ 7 фут. 4 дюйм. безъ 4 фут. 2 дюйм., или 3 фут. 2 дюйм. По составленной таблицѣ видно, что между точками A и G мѣстность повышается на 6 фут. 2 дюйм., а понижается на 7 фут. 11 дюйм.; слѣдовательно она понижается на 1 футъ 9 дюймовъ.

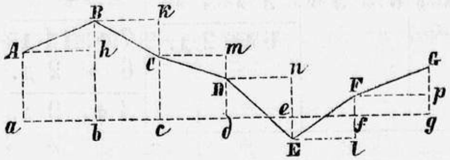
фиг. 246.



§ 180. Чтобы составить изображеніе мѣстности по направленію между точками A и G, вы должны измѣрить горизонтальныя разстоянія между точками A и B, B и C, C и D и т. д. Это измѣреніе производится слѣдующимъ образомъ: поставивъ цѣпной колъ CB (фиг. 246) въ точкѣ B, вытяните цѣпь BF такъ, чтобы она приняла горизонтальное положеніе; при этомъ должно придержать цѣпь за средину, чтобы она не опустилась. Въ точкѣ D поставивъ колъ DE, вытяните горизонтально цѣпь DH до кола AG. Для примѣра предположите, что между точками B и F вытянулась вся цѣпь, а между точками D и H помѣстилось 6 саж.; тогда горизонтальное разстояніе между точками B и A равно 16 саж.

Такимъ-же образомъ, какъ и въ (§177), отложите горизонтальныя разстоянія по одному, а вертикальныя высоты по другому масштабу. Для горизонтальныхъ разстояній предположите, что часть AC (фиг. 80) представляетъ 5 сажень (35 фут.), а для вертикальныхъ высотъ одинъ футъ. Проведя какую-нибудь прямую (фиг. 247), отложите на ней 16 саж. отъ *a* до *b* (см. таблицу § 179), 13 саж. отъ *b* до *c*, 14 саж. отъ *c* до *d* и т. д. Къ прямой *ag* изъ точекъ *a*, *b*, *c* и т. д. возставьте перпендикуляры, и на крайнемъ перпендикулярѣ отъ *a* до A отложите сколько угодно, хоть 10 фут. Чрезъ точку A проведя прямую A*h* параллельно къ *ag*, отложите 1 футъ 7 дюйм. отъ *h* до B. Чрезъ точку B проведите прямую B*k* параллельно къ *ag*, и отъ *k* до C отложите 3 фута 2 дюйм. Точно такимъ-же образомъ получите точки D, E, F, G. Наконецъ проведя прямыя AB, BC, CD и т. д., вы получите профиль мѣстности по направленію между точками A и G.

фиг. 247.



§ 181. *Поверхность ABCD требуется спланировать, т. е. превратить ее въ горизонтальную плоскость* (фиг. 248).

Измѣривъ горизонтальное разстояніе (§ 180) между точками A и B (равное 45 саж.), отмѣрьте по 9 сажень отъ A до E, отъ E до F, отъ F до G, вытягивая цѣпь горизотально. Изъ точекъ A, E, F, G, B къ прямой AB возставьте перпендикуляры и измѣрьте прямую AD, вытягивая цѣпь горизонтально (получите 24 саж.). Потомъ вы отмѣрите по 8 саж. E отъ до J, отъ J до O, отъ O до S, и изъ точекъ J и O къ прямой ES возставьте перпендикуляры. Точки пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ перпендикулярами, возставленными изъ точекъ A, E, F, G, B, означьте колышками. Поставивъ инструментъ въ срединѣ K планируемаго мѣста, вы прикажете установить рейку во всѣхъ отмѣчанныхъ точкахъ A, B, C, D, E, F и т. д. и запишете полученныя высоты цѣли. Для примѣра предположите, что найдены слѣдующія высоты:

фиг. 248.

Точки.	Высоты.	Точки.	Высоты.	Точки.	Высоты.	Точки.	Высоты.
A	3 ф. 2 д.	F	2 ф. 10 д.	L	3 ф. 8 д.	Q	4 ф. 1 д.
B	2 » 4 »	G	3 » 11 »	M	4 » 2 »	R	4 » 2 »
C	2 » 6 »	H	4 » 2 »	N	4 » 6 «	S	3 » 10 »
D	2 » 8 »	J	4 »	O	4 « 4 »	T	3 » 7 »
E	2 » 3 »	K	3 » 10 »	P	4 » 8 »	U	3 » 6 »

Отъ сложенія этихъ высотъ получите 72 фута 2 дюйма. Раздѣлите это число на число всѣхъ точекъ (на 20) — получите 3 фут. $7^{3}/_{10}$ дюйма. Вашъ помощникъ прикрѣпляетъ цѣль къ рейкѣ такъ, чтобы средина цѣли соотвѣтствовала 3 фут. $7^{3}/_{10}$ дюйм. Когда помощникъ поставитъ рейку въ точкѣ A, то вашъ лучъ зрѣнія, направленный чрезъ верхнюю поверхность воды въ стекляныхъ цилиндрахъ, пройдетъ ниже средины прикрѣпленной цѣли; а потому около точки A помощникъ вырываетъ углублсніе и вбиваетъ колышекъ точки A въ землю на столько, чтобы вашъ лучъ зрѣнія прошелъ чрезъ средину цѣли, когда рейка будетъ поставлена на вновь вбитомъ колышкѣ A. Точно такимъ-же образомъ вбиваются въ землю колышки, для которыхъ высота цѣли была меньше 3 фут. $7^{3}/_{10}$ дюйм. Когда помощникъ поставитъ рейку въ точкѣ J, то вашъ лучъ зрѣнія пройдетъ выше средины прикрѣпленной цѣли. Въ такомъ случаѣ, вынувъ колышекъ J изъ земли, помощникъ долженъ возвысить землею мѣсто около точки J и потомъ вбивать колышекъ въ насыпанную землю на столько, чтобы вашъ лучъ зрѣнія прошелъ чрезъ средину цѣли, когда рейка будетъ поставлена на колышкѣ

J. Точно такимъ-же образомъ должно возвышать верхушки колышковъ въ тѣхъ точкахъ, для которыхъ высота цѣли была болѣе 3 фут. $7^{3}/_{10}$ дюйм. Приведя такимъ образомъ верхушки всѣхъ колышковъ въ одну горизонтальную плоскость, выравниваютъ мѣсто ABCD насыпкою земли для углубленныхъ частей и вырываніемъ земли для возвышенныхъ частей.

§ 182. *Требуется вырыть канавку между точками A и B, когда извѣстно, что точка B ниже точки A* (фиг. 249).

По направленію отъ A до B отмѣрьте равныя части отъ 10 до 20 саж., вытягивая цѣпь горизонтально (§ 180). Потомъ узнайте, на сколько точка A выше точки B, поступая, какъ выше объяснено (§ 179). Для примѣра предположите, что отъ A до F каждая станція содержитъ по 20 саж., а станція FB равна 15 саж.; вычисленіемъ вы найдете, по записаннымъ въ таблицѣ высотамъ цѣли, что точка A выше точки B на 3 фута 2 дюйма (38 дюйм.). Станція FB составляетъ $^3/_4$ станціи AC, потому-что 15 саж. равны тремъ четвертямъ 20 сажень. Если мѣстность между точками A и B для $4^3/_4$ станціи понижается на 38 дюйм., то ея пониженіе для одной станціи найдется раздѣленіемъ 38 на $4^3/_4$ (получите 8 дюйм.). Если при точкѣ A глубина рва равна 2 футамъ, то при точкѣ C его глубина должна быть 2 фута 8 дюйм., при точкѣ D — 3 фута 4 дюйм., при точкѣ E — 4 фута и т. д. Потомъ около каждой точки A, B, C и т. д. вырывается углубленіе такой глубины, чтобы въ немъ возможно было обозначать колышкомъ дно вырываемаго рва.

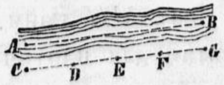
фиг. 249.

§ 183. Чтобы найти паденіе рѣки, вы вобьете во дно ея два кола A и B (фиг. 250), а на берегу поставите рядъ кольевъ C, D, E, F и G. Потомъ вы ставите инструментъ въ точкѣ C, а вашъ товарищъ, подъѣзжая на лодкѣ къ колу A, ставитъ на немъ рейку, отсчитаетъ высоту ея цѣли и

измѣряетъ превышеніе вершины кола A надъ поверхностью воды. Потомъ вы измѣряете высоту инструмента, т. е. узнаете, на сколько поверхность воды въ стекляныхъ трубкахъ инструмента выше поверхности земли. Послѣ этого товарищъ ставитъ рейку въ точкѣ D, передвигаетъ цѣль по вашимъ указаніямъ и отсчитаетъ высоту цѣли рѣки. Потомъ вы ставите инструментъ въ точкѣ D, а товарищъ переноситъ рейку въ точку E. Здѣсь товарищъ отсчитаетъ высоту цѣли рейки, а вы измѣряете высоту инструмента. Такимъ образомъ дойдя до точки G, вы прикажете товарищу поставить рейку на колъ B; здѣсь товарищъ отсчитаетъ высоту цѣли рейки и измѣряетъ превышеніе кола B надъ поверхностью воды. Всѣ полученныя числа записываются въ таблицѣ; изъ этихъ замѣтокъ видно, что точка C выше точки G на 2 фута 11 дюйм. Въ точкѣ A высота цѣли надъ поверхностью воды равна 8 фут. 4 дюйм. и 8 дюйм., или равна 9 фут., а въ точкѣ B высота цѣли равна 6 фут. 8 дюйм. и 6 дюйм., или равна 7 фут. 2 дюйм. Точка A поверхности воды ниже точки C на 9 фут. безъ 4 фут. 2 дюйм., или на 4 ф. 10 дюйм.; а точка B поверхности воды ниже точки G на 7 фут. 2 дюйм. безъ 4 фут. 4 дюйм., или на 2 фута 10 дюйм. Чтобы узнать, на сколько точка A выше или ниже точки B, сложите 2 фут. 11 дюйм. съ 2 фут. 10 дюйм. (получите 5 фут. 9 дюйм.).

Станціи.		Высота инструмента.	Высота цѣли.	Повышенія.	Пониженія.	Замѣчанія.
Отъ	до					
C	D	4 ф. 2 д.	6 ф. 3 д.	—	2ф. 1 д.	Высота цѣли въ точкѣ A равна 8 ф. 4 д., а въ точкѣ B — 6 ф. 8 д. Вершина кола A находится на 8 д. выше поверхности воды, а вершина кола B на 6 дюйм.
D	E	4 » 5 »	5 » 10 »	—	1 » 5 »	
E	F	4 » 4 »	4 » 8 »	—	4 »	
F	G	4 » 1 »	3 » 2 »	11 д.		
G		4 » 4 »				

фиг. 250.



*

Наконецъ изъ 5 фут. 9 дюйм. вычитайте 4 фут. 10 дюйм. (получите 11 дюйм.).

§ 184. *Чтобы предохранить низменную мѣстность отъ наводненія, требуется построить плотину, высота которой должна быть выше обыкновеннаго уровня воды въ рѣкѣ по крайней мѣрѣ на 4 фута.*

Во дно рѣки вбиваются колья A и B (фиг. 250), соотвѣтствующіе оконечностямъ плотины. По срединѣ устраиваемой плотины провѣшивается прямая CG и, по предъидущему, опредѣляется паденіе рѣки между точками A и B. Предположите, что точка A ниже точки B на 18 дюймовъ, длина CG плотины 40 саж. и станціи CD, DE, EF, FG равной длины; тогда по направленію GC на каждыя 10 саж., плотина должна понижаться на $4^1/_2$ дюйма. Въ точкѣ G втыкается въ землю брусъ, высота котораго надъ поверхностью земли должна равняться 5 фут. Высота бруса въ точкѣ F надъ поверхностью земли должна равняться 5 фут. съ 10 дюйм. безъ $4^1/_2$ дюйм., или она равна 5 фут. $5^1/_2$ дюйм. Въ точкѣ E вбивается брусъ, высота котораго надъ поверхностью земли должна равняться 5 фут. $5^1/_2$ дюйм. безъ 1 фут. 4 дюйм. и безъ $4^1/_2$ дюйм., или она равна 3 фут. 9 дюйм. Въ точкѣ D высота вбитаго бруса должна равняться 3 фут. 9 дюйм. съ 10 дюйм. безъ $4^1/_2$ дюйм., или она равна 4 фут. $2^1/_2$ дюйм. Наконецъ высота бруса въ точкѣ C равна 4 фут. $2^1/_2$ дюйм. безъ 2 фут. 5 дюйм. и безъ $4^1/_2$ дюйм., или она равна 1 фут. 5 дюйм. Высота насыпи для плотины соображается съ высотою вбитыхъ въ землю брусьевъ.

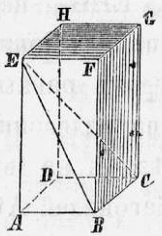
Станціи.	Выс. инстр.	Выс. цѣли.	Повышенія.	Пониженія.
CD	4 ф. 2 д.	6 ф. 7 д.	—	2 ф. 5 д.
DE	4 » 6 »	3 » 8 »	10 д.	—
EF	4 » - »	5 » 4 »	—	1 ф. 4 д.
FG	4 » 4 »	3 » 6 »	10 д.	—

ОТДѢЛЪ IX.

Поверхности и объемы тѣлъ.

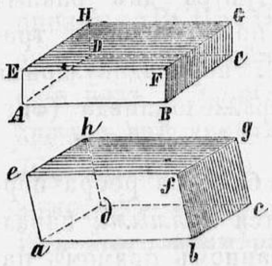
§ 185. Параллелопипеды. Представьте себѣ тѣло (фиг. 251), ограниченное шестью прямоугольниками; этакое тѣло называется *параллелопипедомъ*. Прямоугольники, которыми ограниченъ параллелопипедъ, суть его *грани*. Двѣ противолежащія грани ABCD и EFGH называются *основаніями* параллелопипеда. Прямыя AB, BF, EH, CG и т. д., образуемыя пересѣченіемъ двухъ граней, называются *ребрами*. Высота параллелопипеда есть прямая, проведенная перпендикулярно къ его основаніямъ. Въ параллелопипедѣ каждое изъ ребръ AE, BF, CG, DH можетъ быть принято за высоту, потому-что эти прямыя перпендикулярны къ основаніямъ.

фиг. 251.



Въ (фиг. 251) параллелопипедъ изображенъ такъ, какъ онъ представляется глазу, помѣщенному противъ ребра BF выше точки F. Въ такомъ случаѣ глазу видны три грани ABFE, BCGF, EFGH и девять ребръ AB, BF, AE, EF, BC, CG, FG, EH, HG. Ребра AD, DC, DH, которыя отъ глаза закрыты гранями ABFE, BCGF, EFGH, прочерчиваются пунктирно.

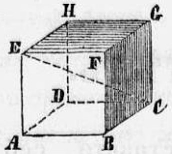
фиг. 252.



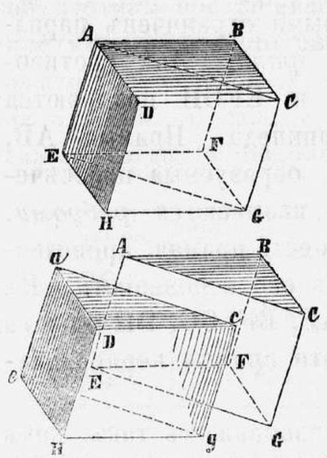
Основанія параллелопипеда могутъ быть параллелограмы ABCD и EFGH (фиг. 252), а боковыя грани — прямоугольники. Въ параллелопипедѣ *abcdefgh* не только основанія, но и боковыя грани суть параллелограмы.

Параллелопипедъ (фиг. 253), ограниченный шестью равными квадратами, называется *кубомъ*.

фиг. 253.



фиг. 254.



§ 186. Призмы. Въ основаніяхъ ABCD и EFGH параллелопипеда (фиг. 254), ограниченнаго параллелограмами, проведите діагонали AC и EG чрезъ оконечныя точки A и E ребра AE; этими діагоналями образуются равные треугольники ABC, ADC, EFG, EHG, потому-что во всякомъ параллелопипедѣ противолежащія грани равны. Представьте себѣ, что параллелопипедъ ABCDEFGH разрѣзанъ на двѣ части по направленію діагоналей AC и EG; тогда образуются два тѣла ABCEFG и *ac*D*eg*H, коихъ основанія суть равные треугольники, а боковыя грани параллелограмы; эти тѣла называются *призмами*. Образовавшіяся призмы равны, потому-что грань ABFE = грани *c*DH*g* (какъ противолежащія грани параллелопипеда ABCDEFGH), грань BCGF = грани *a*DH*e* и основанія равны; слѣдовательно каждая изъ образовавшихся призмъ есть половина параллелопипеда ABCDEFGH.

Отъ разрѣзыванія параллелопипеда (фиг. 251) по направленію діагоналей EG и AC образуются двѣ равныя призмы, коихъ основанія суть равные прямоугольные треугольники, а боковыя ребра — прямыя, перпендикулярныя къ основаніямъ. Точно также изъ параллелопипеда (фиг. 252) образуются двѣ равныя призмы.

Параллелопипеды и призмы, коихъ боковыя ребра перпендикулярны къ основаніямъ, называются *прямыми* параллелопипедами и призмами. Въ четырегранномъ прямомъ параллелопипедѣ (фиг. 251) ребро AB его *ширина*, ребро AE его *высота* и ребро BC его *толщина*.

Наклонными параллелопипедами и призмами называются тѣ, у которыхъ боковыя ребра не перпендикулярны къ основаніямъ (фиг. 252).

Призмою называется вообще такое тѣло, коего параллельныя основанія суть треугольники или четыреугольники или какіе-нибудь многоугольники, а боковыя грани — прямоугольники или параллелограмы. Призма называется *трегранною*, *четырегранною*, *многогранною*, смотря по числу сторонъ ея основанія.

§ 187. Поверхность параллелопипедовъ и призмъ. Чтобы получить поверхность какой-нибудь призмы, должно вычислить площади ея граней и основаній и потомъ сложить числа, которыми выражаются эти площади. Для примѣра предположите, что ребро AB параллелопипеда (или четырегранной призмы) ABCDEFGH (фиг. 251) равна 7 дюйм., ребро BC = 18 дюйм. и ребро AE (высота) = 20 дюйм.; тогда площадь основанія ABCD = 126 квад. дюйм., верхнее основаніе EFGH, равное прямоугольнику ABCD, содержитъ также 126 квад. дюйм. Площадь грани BCGF равна 360 квад. дюйм. и грань ADHE, равная грани BCGF, содержитъ также 360 кв. дюйм. Наконецъ каждая изъ равныхъ граней ABFE и CDHG содержитъ по 140 квад. дюйм. Стало быть поверхность всего параллелопипеда содержитъ 2-жды 126 + 2-жды 360 + 2-жды 140, или 1252 квад. дюйма. При вычисленіи площадей боковыхъ граней призмы ABCDEFGH, вы помножили 18 дюйм. на 20 дюйм., еще разъ 18 дюйм. на 20 дюйм., 7 дюйм. на 20 дюйм. и еще разъ 7 дюйм. на 20 дюйм. Но вмѣсто того, чтобы каждое изъ чиселъ 18, 18, 7 и 7 отдѣльно помножить на 20, вы сложите эти числа (получите 50) и потомъ помножите ихъ сумму 50 на 20 — получите 1000 квад. дюйм. Изъ этого примѣра слѣдуетъ, что *для вычисленія боковой* *поверхности (суммы площадей боковыхъ граней) прямой призмы, должно сперва вычислить периметръ ея основанія и потомъ найденное число линейныхъ мѣръ помножить на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ призмы.*

Чтобы вычислить поверхность четырегранной наклонной призмы (фиг. 254), вы должны сперва опредѣлить высоты параллелограмовъ ABCD, ADHE, CDHG и потомъ вычислить площади эихъ параллелограмовъ. Поверхность трегранной призмы состоитъ изъ площадей двухъ треугольниковъ (ея основаній) и изъ площадей трехъ параллелограмовъ.

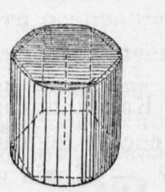
§ 188. Діагональ параллелопипеда. Прямая EC (фиг. 251), соединяющая двѣ противолежащія вершины основаній, называется діагональю параллелопипеда. Предположите, что высота параллелопипеда равна 7 дюйм., его ширина $3^1/_2$ дюйм. и его толщина $4^1/_2$ дюйм.; какъ узнать, сколько дюймовъ содержитъ діагональ EC? Проведя діагональ EB, вы получите два прямоугольные треугольника ABE и EBC. Понятно что, треугольникъ ABE прямоугольный, потому-что его уголъ BAE прямой; но почему-же треугольникъ EBC прямоугольный? — Прямая BC перпендикулярна къ двумъ сторонамъ AB и BF грани ABFE, слѣдовательно она перпендикулярна къ этой грани и ко всякой прямой, проведенной въ этой грани. Откуда вы заключаете, что ребро BC перпендикулярно къ діагонали BE и что уголъ EBC прямой. Изъ прямоугольнаго треугольника ABE вы имѣете (§ 121): площадь квадрата, начерченнаго на гипотенузѣ, равна $7^2 + (3^1/_2)^2$; а изъ прямоугольнаго треугольника EBC вы получите: площадь квадрата, начерченнаго на гипотенузѣ EC, равна площади квадрата, начерченнаго на катетѣ BC, вмѣстѣ съ площадью квадрата, начерченнаго на катетѣ EB, или площадь квадрата, начерченнаго на гипотенузѣ EC, равна $(4^1/_2)^2 + 7^2 + (3^1/_2)^2$, или она равна $81^1/_2$ квад. дюйм.; откуда діагональ $EC = \sqrt{81^1/_2}$ или $EC = 9$ дюйм. (почти). Изъ этого примѣра вы заключаете: *чтобы вычислить діагональ параллелопипеда, вы должны взять квадраты чиселъ, выражающихъ его длину, ширину и толщину, и, сложивъ эти числа, вы должны извлечь квадратный корень изъ ихъ суммы.*

§ 189. Поверхность куба. Такъ какъ въ кубѣ всѣ грани равны, то для полученія его поверхности вы должны вычислить площадь одной грани и эту площадь взять 6 разъ. Въ кубѣ (фиг. 253) ребро AE равно 8 дюймамъ; какъ вычислить поверхность этого куба? — Площадь грани ABFE равна 64 квад. дюйм.; слѣдовательно поверхность куба содержитъ 6 разъ 64 квад. дюйм., или 384 квад. дюйм.

Такъ какъ въ кубѣ длина, ширина и толщина равны, то, по предъидущему правилу (§ 188), діагональ EC куба, коего ребро равно 8 дюйм., вы получите, взявъ квадратъ числа 8 и помноживъ этотъ квадратъ на 3 (получите 192); наконецъ изъ 192 вы должны извлечь квадратный корень — получите $13^4/_5$ дюйма.

§ 190. Цилиндръ. Представьте себѣ прямую призму, коей основаніе правильный многоугольникъ, хоть съ 1536 сторонами. Вы уже знаете, что периметръ такого многоугольника почти сливается съ окружностью, около него описанною (§ 88). Стало быть описавъ окружности около обоихъ основаній призмы, вы замѣтите, что ея боковыя ребра находятся въ столь близкомъ разстояніи одно отъ другаго, что ея боковыя грани кажутся составляющими одну поверхность; тогда призма обратится въ тѣло, имѣющее основаніями два параллельные круга и называющееся *цилиндромъ*. Прямая, соединяющая центры основаній, называется *осью* цилиндра. Въ *прямомъ* цилиндрѣ ось перпендикулярна къ основаніямъ, а въ *наклонномъ* цилиндрѣ она наклонена къ основаніямъ. Въ прямомъ цилиндрѣ ось называется также его высотою.

Фиг. 255.



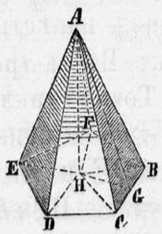
Такъ какъ цилиндръ есть ничто иное какъ призма, у которой основанія суть правильные многоугольники съ весьма малыми сторонами, то поверхность прямаго цилиндра вычисляется точно такъ, какъ вычисляется поверхность прямой призмы. Для вычисленія боковой поверхности цилиндра вы представите себѣ, что она состоитъ изъ весьма большаго числа равныхъ прямоугольниковъ, коихъ высоты равны оси цилиндра, а основанія суть частицы окружностей основаній. Понятно, что сумма этихъ прямоугольниковъ равна такому прямоугольнику, коего высота равна оси цилиндра, а основаніе равно окружности основанія цилиндра. Предположите, что ось цилиндра равна 10 дюймамъ, а діаметръ его основанія равенъ 6 дюймамъ. Помноживъ дробь $^{314}/_{100}$ на 6, вы узнаете, что окружность основанія равна $18^{21}/_{25}$ дюйма. Помножьте $18^{21}/_{25}$ на 10 — получится боковая поверхность цилиндра равною $188^{2}/_{5}$ квад. дюйма. Площадь основанія цилиндра равна $28^{13}/_{50}$ квад. дюйма и оба основанія содержатъ $56^{13}/_{25}$ квад. дюйм. Стало быть вся поверхность цилиндра содержитъ $188^{2}/_{5}$ квад. дюйма и $56^{13}/_{25}$ квад. дюйма, или $244^{23}/_{25}$ квад. дюйма.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Что такое параллелопипедъ — призма? — Какая призма называется наклонною? — Изъ какихъ фигуръ составлена боковая поверхность прямой и наклонной призмы? — Какія четыреугольники бываютъ основаніями параллелопипеда? — Какую часть параллелопипеда составляетъ трегранная призма? — Что такое кубъ? — Сколько ребръ въ кубѣ? — Почему кубъ называется шестигранникомъ? — Какія основанія имѣетъ цилиндръ? — Какая линія называется осью цилиндра? — Какой цилиндръ называется прямымъ — наклоннымъ? — 2) Сколько квадратныхъ вершковъ составляетъ поверхность куба, коего ребро содержитъ $5^{1}/_{2}$ вершковъ? — 3) Боковая поверхность куба равна $182^{1}/_{4}$ вершка; сколько вершковъ содержитъ высота этого куба? — *($6^{3}/_{4}$ вершка).* — 4) Найти поверхность прямаго параллелопипеда, коего высота равна 9 вершк., ширина 12 вершк. и толщина 7 вершк. — 5) Высота прямой призмы равна $4^{1}/_{2}$ футамъ и ея основаніе правильный пятиугольникъ, коего сторона содержитъ $2^{3}/_{4}$ фута; найти боковую поверхность этой призмы. — 6) Поверхность прямаго параллелопипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна 154 квад. вершк. и ребро основанія содержитъ $3^{1}/_{2}$ вершка; сколько вершковъ въ высотѣ этого параллелопипеда? — *($9^{1}/_{4}$ вершка).* — 7) Основаніе прямой призмы равносторонній треугольникъ, коего сторона равна $2^{1}/_{2}$ футамъ; найти всю поверхность этой призмы, когда ея высота равна $4^{1}/_{2}$ футамъ? — *($39^{1}/_{6}$ квад. фут.)* — 8) Высота прямой призмы, коей основаніе правильный шестиугольникъ, равна 15 дюйм.; найти всю поверхность этой призмы, когда извѣстно, что ребро основанія равно 3 дюймамъ. — *($2^{1}/_{5}$ квад. фута).* — 9) Вся поверхность куба составляетъ 100 квад. дюймовъ; сколько дюймовъ содержитъ его діагональ? — *(Почти 7 дюймовъ).* — 10) Діаметръ основанія цилиндра содержитъ 27 дюймовъ; найти боковую поверхность этого цилиндра, когда извѣстно, что его высота равна 52 дюймамъ. — *($30^{123}/_{200}$ квад. фут.).* — 11) Найти высоту цилиндра, коего поверхность содержитъ 196 квад. дюйм. и діаметръ основанія равенъ 8 дюйм. — *($3^{4}/_{5}$ дюйма).* — 12) Разрѣжьте прямой цилиндръ по направленію его оси и діаметра его основанія; тогда вы замѣтите, что каждая половина цилиндра ограничена съ одной стороны прямоугольникомъ. Вычислите площадь этого прямоугольника, когда извѣстно, что боковая поверхность цилиндра содержитъ $188^{317}/_{400}$ квад. дюйма и его высота равна $9^{1}/_{4}$ дюйма. — *($60^{1}/_{8}$ квад. дюйма.)*

§ 191. Пирамида. Представьте себѣ, что какаянибудь точка, находящаяся надъ многоугольникомъ, соединена съ его вершинами прямыми линіями; тогда образуются треугольники, которые съ упомянутымъ многоугольникомъ составляютъ *пирамиду* (фиг. 256). Точка A пересѣченія этихъ треугольниковъ называется *вершиною* и нижняя грань BCDEF — *основаніемъ* пирамиды. Перпендикуляръ AH, опущенный изъ вершины на основаніе, есть *высота* пирамиды.

фиг. 256.

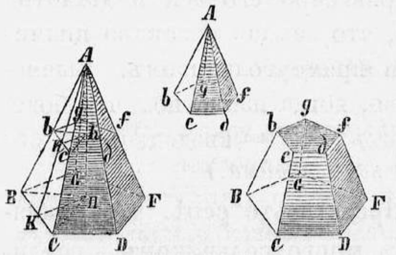


Пирамида, въ которой основаніе правильный многоугольникъ и высота проходитъ чрезъ центръ основанія, называется *правильною*. Въ правильной пирамидѣ боковая поверхность состоитъ изъ равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ.

Проведя прямыя CH, DH, EH, FH, BH, разрѣжьте пирамиду ABCDEF на части по направленію треугольниковъ ACH, ADH, AEH, AFH, ABH; получится столько тресторонныхъ пирамидъ ACHD, ADHE, AEHF, ABHF, ABCH, сколько содержится сторонъ въ основаніи BCDEF. Стало быть можно себѣ представить, что всякая многосторонная пирамида составлена изъ столькихъ тресторонныхъ пирамидъ, имѣющихъ общую высоту съ многосторонною пирамидою, сколько сторонъ въ основаніи этой пирамиды.

§ 192. Подобныя пирамиды. Усѣченная пирамида.

Фиг. 257.



Отъ вершины A по направленію ребръ пирамиды ABCDFG (фиг. 257) отложите равныя части Ab, Ac, Ad, Af, Ag и проведите прямыя bc, cd, df, fg, bg; у васъ образуется многоугольникъ $bcdfg$, подобный многоугольнику BCDFG. Чтобы объяснить подобіе этихъ многоугольниковъ, разсмотрите треугольники ABC и Abc, ACD и Acd, ADF и Adf и т. д. Въ треугольникахъ ABC и Abc сторона AB во столько разъ больше Ab, во сколько разъ сторона AC больше Ac; въ такомъ случаѣ, какъ вамъ извѣстно (§ 57), прямая bc должна быть параллельна къ BC и треугольникъ Abc подобенъ треугольнику ABC. Точно также вы узнаете, что треугольникъ Acd подобенъ треугольнику ACD, треугольникъ Adf подобенъ треугольнику ADF и т. д. Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ вы получите $BC : bc = AC : ac$ и $CD : cd = AC : ac$, откуда, вслѣдствіе (§ 54),

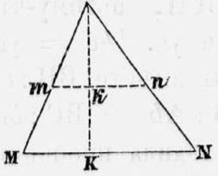
$BC : bc = CD : cd$; потомъ $CD : cd = AD : ad$ и $DF : df = AD : ad$, откуда $CD : cd = DF : df$; далѣе $DF : df = AF : Af$ и $FG : fg = AF : Af$, откуда $DF : df = FG : fg$ и т. д. Такъ какъ прямыя BC и bc, CD и cd, DF и df и т. д. параллельны, то уголъ BCD = уг. bcd, уг. CDF = уг. cdf, уг. DFG = уг. dfg и т. д. Стало быть многоугольники BCDFG и $bcdfg$ подобны и кромѣ того они параллельны, потому-что у нихъ соотвѣтствующія стороны параллельны.

По направленію многоугольника $bcdfg$ разрѣжьте пирамиду ABCDFG на двѣ части; верхняя часть $Abcdfg$ есть пирамида, основаніе которой подобно основанію BCDFG и боковыя грани подобны треугольникамъ ABC, ACD, ADF и т. д.; въ такомъ случаѣ пирамида $Abcdfg$ подобна пирамидѣ ABCDFG. Нижняя часть $BCDFGbcdfg$ пирамиды ABCDFG, заключенная между двумя параллельными и подобными многоугольниками и ограниченная съ боковъ трапеціями, называется *усѣченною пирамидою*. Пирамида ABCDFG, относительно усѣченной, называется *полною*. Въ усѣченной пирамидѣ, происшедшей отъ правильной полной пирамиды, боковыя грани равны. (Почему?).

Въ подобныхъ пирамидахъ ABCDFG и $Abcdfg$ во 1) боковыя ребра пропорціональны, т. е. $AB : Ab = AC : Ac$, $AC : Ac = AD : ad$ и т. д.; во 2) ребра основаній пропорціональны, т. е. $BC : bc = CD : cd$, $CD : cd = DF : df$ и т. д.; и въ 3) высоты AH и Ah пропорціональны къ ребрамъ AB и ab. Для объясненія послѣдняго обстоятельства соедините оконечную точку h высоты Ah съ вершинами b и c, и оконечную точку H высоты AH съ вершинами B и C; тогда получатся два подобные треугольника bch и BCH, потому-что уг. bch = уг. BCH, уг. cbh = уг. CBH и уг. bhc = уг. BHC (§ 19); изъ этихъ треугольниковъ вы имѣете $BH : bh = BC : bc$; но вамъ уже извѣстно, что $AB : Ab = BC : bc$; стало быть (§ 54) $BH : bh = AB : Ab$. Послѣдняя пропорція и равенство угловъ ABH и Abh (почему эти углы равны?) показываютъ, что треугольники ABH и Abh подобны; слѣдовательно $AH : Ah = AB : Ab$. Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и Abc вы имѣете $BC : bc = AB : Ab$ и изъ подобныхъ треугольниковъ ABH и Abh получится $AH : Ah = AB : Ab$; изъ двухъ послѣднихъ пропорцій вы получите $BC : bc = AH : Ah$.

§ 193. Поверхность пирамидъ. Для правильной пирамиды (фиг. 256), коей основаніе правильный пятиугольникъ, предположите, что нижнее ребро BC равно $3^{1}/_{2}$ дюймамъ и перпендикуляръ AG, опущенный изъ вершины A на ребро BC, равенъ $8^{3}/_{4}$ дюйма; тогда площадь треугольника ABC получится умноженіемъ $8^{3}/_{4}$ на $3^{1}/_{2}$ и раздѣленіемъ найденнаго числа $30^{5}/_{8}$ на 2 — получите $15^{5}/_{16}$ квад. дюйм. Помноживъ $15^{5}/_{16}$ на 5, т. е. на число боковыхъ граней, вы узнаете, что боковая поверхность пирамиды равна $76^{9}/_{16}$ квад. дюйм. Но понятно, что сумма треугольниковъ ABC, ACD, ADE, AEF, ABF равна такому треугольнику, коего высота содержитъ $8^{3}/_{4}$ дюйма и основаніе равно периметру многоугольника BCDEF, т. е. равно $17^{1}/_{2}$ дюйм. Помноживъ $8^{3}/_{4}$ на $17^{1}/_{2}$, вы раздѣлите $153^{1}/_{8}$ на 2 — получите $76^{9}/_{16}$ квад. дюйм. Изъ этого примѣра вы заключаете, что *боковая поверхность прямой правильной пирамиды равна площади такого треугольника, у котораго основаніе равно периметру основанія пирамиды и высота равна высотѣ одной изъ боковыхъ граней.*

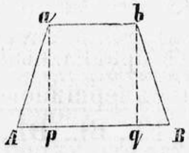
фиг. 258.



Такъ какъ усѣченная пирамида BCDFG*bcdfg* (фиг. 257) составляетъ разность между полными пирамидами ABCDFG и A*bcdfg*, то боковая поверхность этой усѣченной пирамиды равна разности площадей двухъ треугольниковъ AMN и A*mn* (фиг. 258), имѣющихъ общую вершину A, основаніе MN, равное периметру многоугольника BCDFG, основаніе *mn*, равное периметру многоугольника *bcdfg*; высота большаго треугольника равна высотѣ боковой грани большой

пирамиды и высота малаго треугольника равна высотѣ боковой грани малой пирамиды. Вы знаете, что многоугольникъ *bcdfg* параллеленъ многоугольнику BCDFG; стало быть прямая *mn* должна быть параллельна къ прямой MN. По параллельности этихъ прямыхъ вы заключаете, что четыреугольникъ MN*nm* есть трапеція, коей высота равна разности высотъ боковыхъ граней пирамидъ ABCDFG и A*bcdfg*, т. е. эта высота равна высотѣ боковой грани усѣченной пирамиды. Такъ какъ разность между треугольниками AMN и A*mn* есть трапеція MN*nm*, то вы заключаете, что *боковая поверхность усѣченной пирамиды равна площади такой трапеціи, у которой нижнее основаніе равно периметру основанія BCDFG, верхнее основаніе — периметру основанія bcdfg и высота равна высотѣ Kk боковой грани усѣченной пирамиды.*

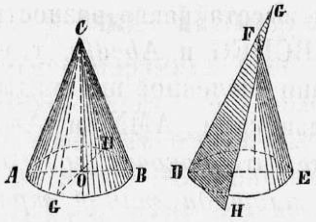
фиг. 259.



Представьте себѣ усѣченную пирамиду, у которой основанія суть правильныя восьмиугольники, ребро AB (фиг. 259) нижняго основанія равно $6^{1}/_{2}$ дюйм., ребро *ab* верхняго основанія равно 5 дюйм. и боковое ребро A*a* равно 10 дюйм.; какъ вычислить боковую поверхность этой пирамиды? — Сперва вы должны найти высоту *ap* боковой грани AB*ba*; эта высота найдется изъ прямоугольнаго треугольника A*ap*, въ которомъ гипотенуза A*a* равна 10 дюйм., катетъ $Ap =$ катету Bq, потому-что прямоугольные треугольники $Aap = Bbq$ равны (почему?) и $Ap + Bq$ или $2Ap = AB - ab$ или $2Ap = 1^{1}/_{2}$ дюйм., откуда $Ap = {}^{3}/_{4}$ дюйм. Вслѣдствіе (§ 122) вы узнаете, что квадратъ, начерченный на катетѣ *ap*, содержитъ 100 кв. дюйм. безъ ${}^{9}/_{16}$ кв. дюйма, или этотъ квадратъ равенъ $99^{7}/_{16}$ кв. дюйм., откуда $ap = 9^{3}/_{4}$ дюйма. Теперь вамъ придется вычислить площадь трапеціи, коей высота равна $9^{3}/_{4}$ дюйма, нижнее основаніе содержитъ 8 разъ $6^{1}/_{2}$ дюйма и верхнее основаніе — 8 разъ 5 дюймовъ. По правилу (§ 110) вы узнаете, что площадь этой трапеціи, или боковая поверхность усѣченной пирамиды, равна $448^{1}/_{2}$ квад. дюйм.

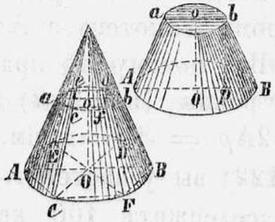
§ 194. Конусъ. Представьте себѣ пирамиду, коей основаніе такой правильный многоугольникъ, который можетъ быть принятъ за окружность круга (§ 88); тогда боковыя грани сольются въ одну поверхность, оканчивающуюся точкою; этакая пирамида (фиг. 260) называется *конусомъ*. Высота конуса есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины С на основаніе. Конусъ САВ, коего высота проходитъ чрезъ центръ основанія, называется *прямымъ*. Въ *наклонномъ* конусѣ FDE высота пересѣкаетъ основаніе внѣ центра. Соединивъ оконечныя точки G и H діаметра GH основанія съ вершиною С конуса прямыми GC и HC, вы получите равнобедренный треугольникъ CGH, потому-что прямая CO, проведенная перпендикулярно къ сторонѣ GH, проходитъ чрезъ средину O этой прямой.

фиг. 260.



Въ основаніи конуса LAB (фиг. 261) впишите правильный шестиугольникъ ACFBDE и соедините его вершины съ вершиною L конуса прямыми AL, CL, FL, BL, DL, EL; на этихъ прямыхъ, которыя могутъ быть названы *сторонами* конуса, отъ вершины L отложите равныя части La, Lc, Lf, Lb, Ld, Le и проведите прямыя *ac*, *cf*, *fb*, *bd*, *de*, *ea* — получите многоугольникъ *acfbde*, подобный многоугольнику ACFBDE, и кромѣ того образовавшійся многоугольникъ параллеленъ вписанному въ основаніи многоугольнику. Такъ какъ *acfbde* есть правильный шестиугольникъ, то кривая линія, проходящая чрезъ его вершины, должна быть окружностью круга, коего центръ находится на прямой LO. Разрѣжьте конусъ на двѣ части

фиг. 261.



по направленію окружности *acfbde*, верхняя часть будетъ конусъ съ основаніемъ *acfbde* и вершиною L, и нижняя часть такое тѣло, которое съ боковъ ограничена частью конической поверхности, а сверху и снизу параллельными кругами; эта нижняя часть называется *усѣченнымъ конусомъ*. Вы видите, что усѣченный конусъ есть часть *полнаго* конуса.

§ 195. Поверхность конуса. Принявъ полный конусъ за пирамиду, вы можете вычислить его боковую поверхность, какъ вычислялась въ (§ 193) боковая поверхность правильной пирамиды. Привычисленіи боковой поверхности пирамиды вы помножили высоту одной изъ боковыхъ граней на периметръ основанія пирамиды и раздѣлили найденное число на 2; слѣдовательно для вычисленія боковой поверхности конуса LAB (фиг. 261) вы должны число мѣръ, содержащихся въ сторонѣ LA *) помножить на число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ окружности основанія конуса, и наконецъ найденное число раздѣлить на 2. Предположите, что высота LO конуса равна 12 вершкамъ и діаметръ AB его основанія содержитъ 7 вершковъ; какъ найти боковую поверхность этого конуса? — Сперва вы должны вычислить сторону LA изъ прямоугольнаго треугольника LAO, въ которомъ катетъ $LO = 12$ вершк. и катетъ $AO = 3^{1}/_{2}$ вершк.; вслѣдствіе § 121 квадратъ, начерченный на сторонѣ LA, долженъ содержать 144 кв. вершк. $+\ 12^{1}/_{4}$ кв. вер., или $156^{1}/_{4}$ кв. вер., откуда $LA = 12^{1}/_{2}$ вершк. Помноживъ дробь $^{314}/_{100}$ на 7, вы узнаете, что окружность основанія содержитъ $21^{49}/_{50}$ вершк. Помножьте $21^{49}/_{50}$ на $12^{1}/_{2}$ — по-

---

*) Чтобы найти положеніе стороны конуса, приложите къ нему чертежный треугольникъ такъ, чтобы длинный катетъ DG (фиг. 260) пришелся на конуса по направленію отъ вершины F до основанія DE, и чтобы въ то-же самое времѣ короткій катетъ DH совмѣстился съ плоскостью, на которой поставленъ конусъ. Прямая DF, проведенная на поверхности конуса по краю длиннаго катета, опредѣлитъ положеніе стороны конуса.

лучите $274^3/_4$ квад. вершк. Наконецъ раздѣливъ $274^3/_4$ на 2, вы узнаете, что боковая поверхность конуса содержитъ $137^3/_8$ квад. вершка. При этихъ вычисленіяхъ вы поступили точно такъ, какъ при вычисленіи площади треугольника, у котораго основаніе содержитъ $21^{49}/_{50}$ вершк. и высота равна $12^1/_2$ вершкамъ. Откуда слѣдуетъ, что *боковая поверхность прямаго конуса равна площади такого треугольника, коего основаніе равно длинѣ окружности основанія и высота равна сторонѣ конуса.*

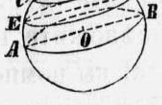
Извѣстно, что усѣченный конусъ ABba (фиг. 261) есть разность между конусами LAB и Lab; слѣдовательно, чтобы найти боковую поверхность усѣченнаго конуса, вы должны вычесть боковую поверхность конуса Lab изъ боковой поверхности конуса LAB. Вы уже знаете, что боковая поверхность конуса LAB равна площади такого треугольника AMN (фиг. 258), коего высота AK равна сторонѣ LA конуса и основаніе MN равно окружности его основанія; точно также поверхность конуса Lab равна площади треугольника Amn, коего высота Ak равна сторонѣ La и основаніе mn равно окружности основанія конуса. Такъ какъ конусъ Lab есть часть конуса LAB, основаніе acfbde параллельно къ основанію ACFBDE и высота Lo есть часть высоты LO, то треугольникъ Amn долженъ составлять часть треугольника AMN, основаніе mn должно быть параллельно къ основанію MN и высота Ak должна составлять часть высоты AK. Разность между боковыми поверхностями конусовъ LAB и Lab должна равняться разности площадей треугольниковъ AMN и Amn; но разность между этими треугольниками равна трапеціи MNnm, коей высота Kk равна AK безъ Ak, или равна LA безъ La; слѣдовательно боковая *поверхность усѣченнаго конуса равна площади такой трапеціи, въ которой высота равна сторонѣ конуса, нижнее основаніе равно окружности его нижняго основанія и верхнее основаніе равно окружности его верхняго основанія.*

Вычислить боковую поверхность усѣченнаго конуса

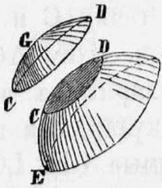
ABba (фиг. 261), коего сторона Aa равна $6^1/_4$ дюйма, діаметръ AB равенъ 15 дюйм. и діаметръ ab равенъ $11^1/_4$ дюйм. Сперва вы должны вычислить высоту oO (или bp) точно такъ вычислялась высота ap въ фиг. 259; тогда вы узнаете, что высота oO усѣченнаго конуса равна $5^7/_8$ дюйма. Потомъ вы найдете, что окружность AO содержитъ $47^1/_{10}$ дюйма и окружность ao равна $35^{13}/_{40}$ дюйма. По правилу (§ 193) сложивъ $47^1/_{10}$ и $35^{13}/_{40}$, вы помножите найденную сумму $82^{17}/_{40}$ на $5^7/_8$ и наконецъ раздѣлите полученное число $484^{79}/_{320}$ на 2; тогда вы узнаете, что поверхность усѣченнаго конуса равна почти $242^1/_8$ кв. дюйма.

§ 196. Шаръ. Тѣло, имѣющее такую поверхность, всѣ точки которой равно-отстоятъ отъ точки, находящейся внутри этого тѣла, называется *шаромъ*. Точка O (фиг. 262), равно-удаленная отъ точекъ шаровой поверхности, есть *центръ* шара. Прямая OA, означающая разстояніе между центромъ и какою-нибудь точкою A шаровой поверхности, называется *радіусомъ* шара. Прямая AB, проведенная чрезъ центръ между двумя точками A и B шаровой поверхности, есть *діаметръ* шара. Представьте себѣ, что на поверхности шара прочерчена окружность такого круга, коего діаметръ AB есть діаметръ шара; этотъ кругъ называется *большимъ кругомъ* шара. Разрѣзавъ шаръ по направленію большаго круга, вы получите два полушара. По направленію круга CD отрѣжьте отъ шара часть CGD (фиг. 263); эта часть шара, ограниченная съ одной стороны кругомъ, называется *шаровымъ отрѣзкомъ*. Часть CDFE шара, заключенная между двумя параллельными кругами CD и EF, называется *шаровымъ поясомъ*.

фиг. 262.



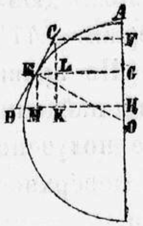
фиг. 263.



§ 197. Вычисленіе боковой поверхности усѣченнаго конуса, касающагося къ

поверхности шара. Чрезъ какую-нибудь точку E (фиг. 264) полуокружности, описанной изъ центра O, проведите касательную и на ней отложите равныя части EC и ED. Изъ точекъ C, E, D опустите перпендикуляры CF, EG, DH на діаметръ полуокружности и проведите радіусъ EO. Потомъ представьте себѣ, что полуокружность вращается около діаметра; тогда она, совершая полный оборотъ, образуетъ поверхность шара; прямыя CF, EG, DH, вращаясь вмѣстѣ съ полуокружностью, опишутъ параллельные круги, а касательная CD образуетъ поверхность усѣченнаго конуса, касающагося къ поверхности шара по направленію окружности EG, проходящей чрезъ средину E стороны CD конуса. Чтобы вычислить боковую поверхность этого конуса, вы помножите дробь $^{314}/_{50}$ (§195) на длину радіуса CF и потомъ ту-же дробь помножите на длину радіуса DH; сложивъ оба найденныя числа, вы помножите полученную сумму на длину стороны CD и наконецъ раздѣлите то, что получится на 2. Но эти вычисленія вы можете замѣнить болѣе простыми, именно сперва вы сложите длины CF и DH, потомъ помножите сумму этихъ прямыхъ на дробь $^{314}/_{50}$ и наконецъ то, что получится, на половину длины CD. Теперь узнайте, нельзя-ли сумму прямыхъ CF и DH замѣнить одною прямою. Чрезъ точки C и E проведите прямыя CK и EM параллельно къ радіусу AO. Такъ какъ прямыя CF, EG, DH перпендикулярны къ радіусу AO, то (§ 18) они конечно перпендикулярны и къ прямымъ CK и EM; по этой-же причинѣ прямыя CF, LG, KH равны (§ 39) и также прямыя EG и MH равны. Далѣе треугольники CEL и DEM равны, потому-что CE = DE, уг. ECL = уг. DEM (соотвѣтствующіе) и уг. CEL = уг. EDM (соотвѣтствующіе); слѣдовательно EL = DM. Прямая EG = EL + LG или EG = CF + EL (потому-что часть LG = прямой CF); прямая MH или EG = DH — DM, но DM = EL, стало быть EG = DH — EL. Сложивъ длину EG = CF + EL съ длиною EG = DH — EL, вы получите 2EG = CF + EL + DH — EL; вы здѣсь прибавляете длину EL и отнимаете ту-же самую длину EL, значитъ: вы ничего не прибавляете и ничего не отнимаете; стало быть 2EG = CF + DH. Слѣдовательно для вычисленія боковой поверхности разсматриваемаго конуса, вы помножите удвоенную длину EG на дробь $^{314}/_{50}$ и то, что получится, на половину длины CD. Извѣстно, что отъ умноженія удвоенной длины EG на половину длины CD получится столько-же, сколько получится отъ умноженія длины EG на длину CD. На этомъ основаніи боковая поверхность усѣченнаго конуса получится умноженіемъ длины CD его стороны на длину EG радіуса, проведеннаго чрезъ средину E прямой CD параллельно къ радіусамъ основаній конуса, и на дробь $^{314}/_{50}$, т. е. поверхность этого конуса равна CD × EG × $^{314}/_{50}$.

Фиг. 264.

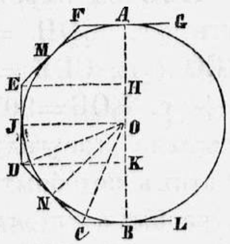


Въ треугольникахъ CDK и EGO углы CKD и EGO равны (прямые углы), уг. CDK = уг. EOG (такъ какъ касательная CD перпендикулярна къ радіусу EO, то уг. CEG + уг. GEO = 90^0, но уг. CEG = уг. CDH по параллельности прямыхъ EG и DH, слѣдовательно уг. CDH + уг. GEO = 90^0; изъ прямоугольнаго треугольника EGO вы имѣете уг. EOG + уг. GEO = 90^0, стало быть уг. CDH = уг. EOG) и наконецъ уг. DCK = уг. GEO (уг. CDK = уг. EOG, уг. DCK + CDK = 90^0 и уг. GEO + уг. EOG = 90^0, стало быть уг. DCK = уг. GEO); слѣловательно треугольники CDK и EGO подобны (§ 56). Въ этихъ подобныхъ треугольникахъ стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, должны быть пропорціональны (§ 58), именно CD : EO = CK : EG. Вслѣдствіе (§ 55) вы изъ этой пропорціи получите CD × EG = EO × CK, т. е. длина CD, помноженная на длину EG, равна длинѣ EO, помноженной на длину CK.

Итакъ для вычисленія боковой поверхности разсматриваемаго конуса, вы замѣните умноженіе длины CD на длину EG умноженіемъ длины EO на длину CK; слѣдовательно, чтобы получить боковую поверхность образовавшагося усѣченнаго конуса, вы помножите дробь $^{314}/_{50}$ на длину EO радіуса шара и то, что получится, на высоту CK конуса. Но вы знаете, что отъ умноженія дроби $^{314}/_{50}$ на длину радіуса EO получится длина окружности круга (§ 89), и помноживъ длину окружности круга EO на длину прямой CK, перпендикулярной къ этому кругу, вы получите боковую поверхность прямаго цилиндра, коего высота равна прямой CK и радіусъ основанія равенъ прямой EO (§ 190). Произведенныя вычисленія приводятъ къ тому заключенію, что *боковая поверхность усѣченнаго конуса, касающагося къ поверхности шара по направленію окружности, равно отстоящей отъ окружностей основаній конуса, равна боковой поверхности такого прямаго цилиндра, коего высота равна высотѣ конуса и радіусъ основанія равенъ радіусу шара.*

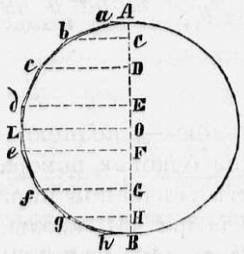
§ 198. Вычисленіе поверхности шара.

фиг. 265.



Около окружности круга (фиг. 265) опишите правильный восьмиугольникъ и, проведя діаметръ AB перпендикулярно къ сторонамъ CL и FG, опустите на него перпендикуляры EH и DK изъ вершинъ E и D. Извѣстно, что средина стороны правильнаго многоугольника, описаннаго около окружности, есть точка касанія этой прямой; слѣдовательно діаметръ AB проходитъ чрезъ средніе точки сторонъ FG и CL. Представьте себѣ, что половина AFEDCB описаннаго многоугольника вращается вмѣстѣ съ полуокружностью около діаметра AB; тогда этимъ вращеніемъ полуокружность произведетъ поверхность шара, стороны EF и CD образуютъ поверхности двухъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, касающихся къ шару по направленію окружностей, проходящихъ чрезъ средніе точки M и N сторонъ EF и CD параллельно къ основаніямъ конусовъ; при этомъ-же вращеніи образуется стороною DE поверхность прямаго цилиндра. Изъ (§ 197) вамъ извѣстно, что боковая поверхность усѣченнаго конуса, имѣющаго сторону EF, получится умноженіемъ дроби $^{314}/_{50}$ на длину OJ радіуса шара и на высоту AH конуса; поверхность цилиндра, имѣющаго высоту HK, получится умноженіемъ дроби $^{314}/_{50}$ на длину радіуса OJ (потому-что радіусъ DK основанія цилиндра равенъ радіусу OJ шара) и на высоту HK; наконецъ помноживъ дробь $^{314}/_{50}$ на длину радіуса OJ и на высоту KB, вы получите боковую поверхность усѣченнаго конуса, имѣющаго сторону CD. Понятно, что вы получите поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія половины AFEDCB описаннаго многоугольника, сложивъ поверхности двухъ усѣченныхъ конусовъ AFEH и BCDK съ поверхностью цилиндра HEDK. Послѣднія вычисленія вы можете замѣнить слѣдующими: вмѣсто того, чтобы каждую длину AH, HK, KB отдѣльно помножить на дробь $^{314}/_{50}$, умноженную на длину OJ, и потомъ сложить найденныя числа, вы сложите длины AH, HK, KB и, помноживъ ихъ сумму, т. е. длину AB діаметра шара, на дробь $^{314}/_{50}$, вы помножите то, что получится, на длину радіуса OJ шара.

фиг. 266.



Опишите теперь около окружности круга правильный шестнадцатиугольникъ (фиг. 266) и вращайте его половину A*abcdefgh*B около діаметра AB; тогда образуются цилиндръ съ высотою EF и шесть усѣченныхъ конусовъ, касающихся къ поверхности шара. Чтобы найти поверхность тѣла, образовавшагося отъ вращенія половины описаннаго многоугольника, вы должны поступить точно такъ, какъ вычислялась въ фиг.

265 поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія половины правильнаго восьмиугольника, т. е. вы должны помножить: 1) дробь $^{314}/_{50}$ на радіусъ OL шара и на высоту AC, 2) дробь $^{314}/_{50}$ на радіусъ OL и на высоту CD, 3) дробь $^{314}/_{50}$ на радіусъ OL и на высоту DE, 4) дробь $^{314}/_{50}$ на радіусъ OL (потому-что радіусъ eF основанія цилиндра равенъ радіусу шара) и на высоту EF и т. д. Вмѣсто этихъ вычисленій вы можете поступить вотъ такъ: сложивъ длины AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB, вы помножите ихъ сумму, т. е. діаметръ AB шара, на дробь $^{314}/_{50}$ и то, что получится, на длину радіуса шара. Изъ этихъ двухъ примѣровъ вы видите, что отъ вращенія половины правильнаго многоугольника около діаметра вписанной полуокружности всегда происходитъ тѣло, коего поверхность равна дроби $^{314}/_{50}$, помноженной на радіусъ и діаметръ шара, касающагося къ этому тѣлу. Точно такимъ-же образомъ получится поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія такого правильнаго многоугольника, коего стороны столь малы, что они сливаются съ окружностью; въ такомъ случаѣ поверхности всѣхъ усѣченныхъ конусовъ и средняго цилиндра сольются съ поверхностью шара, и слѣдовательно поверхность шара равна дроби $^{314}/_{50}$, помноженной на его радіусъ и діаметръ. Но помноживъ дробь $^{314}/_{50}$ на радіусъ, вы получите окружность круга; а отъ умноженія этой окружности на ея діаметръ получится боковая поверхность цилиндра, коего высота равна діаметру его основанія; стало быть *поверхность шара равна боковой поверхности такого прямаго цилиндра, коего радіусъ основанія равенъ радіусу шара и высота равна діаметру шара.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Какая пирамида называется правильною — полною — усѣченною? — Изъ какихъ фигуръ составлена боковая поверхность полной пирамиды и боковая поверхность усѣченной пирамиды? — Ребро Ab (фиг. 257) составляетъ $^{3}/_{5}$ ребра AB; сколько вершковъ содержитъ высота AH, когда высота Ah равна $3^{1}/_{2}$

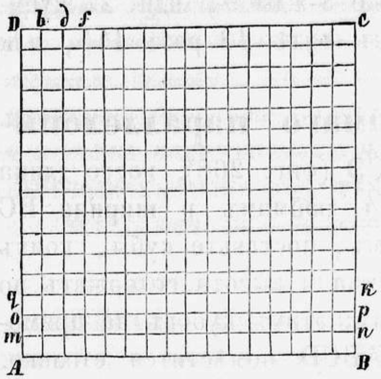
вершкамъ? — Вычислить высоту AH полной правильной пирамиды, коей основаніе правильный шестиугольникъ, когда извѣстно, что ребро AB = 12 вершк. и ребро BC = $4^{1}/_{2}$ вершк. — 2) Вычислить боковую поверхность усѣченной правильной пирамиды (фиг. 257), когда ребро BC = 3 дюйм., ребро bc = 2 дюйм., ребро Bb = 11 дюйм. и основаніе пирамиды правильный пятиугольникъ. — *($131^{1}/_{4}$ квад. дюйм.).* — 3) Найти всю поверхность усѣченной правильной пирамиды съ квадратными основаніями, когда верхнее ребро равно $5^{1}/_{2}$ дюйм., нижнее ребро равно $8^{3}/_{4}$ дюйм. и боковое ребро равно 15 дюйм. — *($530^{3}/_{4}$ квад. дюйм.).* — 4) Найти боковую поверхность усѣченной правильной пирамиды съ квадратными основаніями, когда ея высота равна $5^{1}/_{5}$ дюйма, верхнее ребро равно $4^{4}/_{5}$ дюйма и нижнее ребро $6^{2}/_{5}$ дюйма. — *($16^{12}/_{25}$ квад. дюйма).* — 5) Боковая поверхность полной правильной пирамиды вычисляется какъ площадь какой фигуры? — боковая поверхность усѣченной правильной пирамиды вычисляется какъ площадь какой фигуры? — 6) Чѣмъ отличается конусъ отъ пирамиды? — Какой конусъ называется прямымъ — полнымъ — усѣченнымъ? — Боковая поверхность полнаго конуса равна площади какой фигуры? — Боковая поверхность усѣченнаго конуса равна площади какой фигуры? — 7) Найти боковую поверхность полнаго конуса, коего высота равна 16 футамъ и радіусъ основанія равенъ 6 футамъ. — *($320^{7}/_{25}$ квад. фута).* — 8) Боковая поверхность конуса, коего сторона равна $7^{1}/_{2}$ фут., содержитъ $106^{19}/_{25}$ квад. фута; сколько футовъ въ радіусѣ основанія этого конуса? — *($4^{8}/_{15}$ фута).* — 9) Сторона прямаго конуса, равная діаметру основанія, содержитъ 14 вершковъ; сколько квадратныхъ вершковъ въ боковой поверхности этого конуса? — *($307^{18}/_{25}$ квад. вершк.)* — 10) Поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 96 квад. дюйм., діаметръ его нижняго основанія равенъ 6 дюйм. и діаметръ верхняго основанія равенъ 2 дюйм.; сколько дюймовъ содержитъ высота этого конуса? — *(Почти $3^{1}/_{4}$ дюйма).* — 11) Найти боковую поверхность усѣченнаго конуса, когда радіусъ его нижняго основанія $12^{1}/_{2}$ вершк., радіусъ верхняго основанія равенъ 6 вершк. и сторона равна 36 вершк. — *($2091^{6}/_{25}$ квад. вершк.)* — 12) Вычислить боковую поверхность усѣченнаго конуса (фиг. 264), коего высота FH = $3^{1}/_{2}$ дюйм., радіусъ CF = 4 дюйм. и радіусъ DH = $6^{1}/_{2}$ дюйм. —

(Почти $140^{1}/_{8}$ квад. дюйм.) — 13) Боковая поверхность усѣченнаго конуса содержитъ $79^{17}/_{25}$ квад. дюйма, радіусъ нижняго основанія равенъ $4^{1}/_{2}$ дюйм. и сторона конуса равна $3^{1}/_{2}$ дюйм.; сколько дюймовъ содержитъ радіусъ верхняго основанія? — *(Почти $2^{3}/_{4}$ дюйма).* — 14) Найти боковую поверхность тѣла (фиг. 264), когда радіусъ шара равенъ $3^{3}/_{4}$ дюйма. — *($176^{5}/_{8}$ квад. дюйм.)* — 15) Вычислить поверхность шара, коего радіусъ равенъ 15 дюйм. — *(2826 квад. дюйм.).* — 16) Діаметръ экватора земнаго шара равенъ 1719 географическимъ милямъ; сколько квадратныхъ миль составляетъ поверхность земнаго шара? — *($9278577^{27}/_{50}$ квад. мили).* — 17) Окружность луны содержитъ $1425^{14}/_{25}$ географической мили; сколько квадратныхъ миль составляетъ поверхность луны? — *($647204^{6}/_{25}$ квад. мили).* — 18) Найти радіусъ шара, коего поверхность содержитъ 3 квад. аршина. — *(Поверхность шара содержитъ 3 раза 256 квад. вершк., или 768 кв. вершк. Помноживъ дробь $^{314}/_{50}$ на длину неизвѣстнаго радіуса и то, что получится, на длину діаметра шара, вы должны получить поверхность шара или 768 квад. вершк.; слѣдовательно раздѣливъ 768 на дробь $^{314}/_{50}$, вы узнаете, что длина радіуса, помноженная на діаметръ (или на удвоенную длину радіуса), равна $122^{46}/_{157}$ кв. вер. Далѣе представьте себѣ такой прямоугольникъ, коего площадь составляетъ $122^{46}/_{157}$ кв. вер., основаніе равно удвоенному радіусу шара и высота равна этому радіусу (потому-что помноживъ длину прямой на длину другой прямой, вы получите площадь прямоугольника); этотъ прямоугольникъ состоитъ изъ двухъ равныхъ квадратовъ; площадь каждаго изъ нихъ содержитъ половину числа $122^{46}/_{157}$ квад. вершк., и его сторона равна радіусу шара. Наконецъ вычисливъ сторону квадрата (§ 107), коего площадь равна $61^{23}/_{157}$ квад. верш., вы узнаете, что радіусъ шара равенъ почти $8^{1}/_{6}$ дюйм.* — 19) Найти радіусъ шара, коего поверхность равна квадратной сажени. — *(Почти $14^{2}/_{17}$ вершка).* — 20) Вычислить діаметръ полушара, когда его поверхность содержитъ $2^{1}/_{2}$ квад. аршина). — *($20^{28}/_{157}$ вершка).*

§ 199. Кубическія мѣры или мѣры объемовъ. Если выточить кусокъ дерева такимъ образомъ, чтобы онъ былъ ограниченъ шестью равными квадратиками, каждый длиною въ дюймъ, то вамъ представится *кубическій дюймъ.* Кубъ, коего длина, ширина и высота содержатъ по одному вершку, представляетъ *кубическій вершокъ.*

Начертите квадратъ ABCD (фиг. 267) и предположите, что его сторона равна аршину; тогда площадь ABCD (§ 94) содержитъ 16 разъ 16, или 256 квадратныхъ вершковъ. Далѣе предположите, что у васъ приготовлены кубы, у которыхъ каждая грань равна квадратному вершку; каждый изъ этихъ кубовъ представляетъ *кубическій вершокъ,* потому-что у нихъ длина, ширина и высота содержатъ по одному вершку. Поставивъ эти кубы, одинъ подлѣ другаго, вы узнаете, что ихъ помѣстится 16 разъ 16 или 256 на квадратѣ ABCD. Потомъ на плоскость, образовавшуюся верхними гранями помѣщенныхъ кубовъ, поставьте второй рядъ такихъ-же кубовъ точно такимъ-же образомъ, какъ поставленъ былъ нижній рядъ; слѣдовательно и во второмъ ряду помѣстится 16 разъ 16 или 256 кубовъ. Послѣ этого поставьте третій, четвертый, пятый и т. д., наконецъ шестнадцатый рядъ такихъ-же кубовъ. Во всѣхъ шестнадцати рядахъ должно быть 16 разъ болѣе кубовъ, нежели ихъ помѣстилось въ нижнемъ ряду на квадратѣ ABCD; т. е. всѣхъ кубовъ помѣстилось 16 разъ 256, или 16 разъ 256 кубическихъ вершковъ, именно 4096 кубическихъ вершковъ. Далѣе замѣтьте, что этими шестнадцатью рядами кубовъ образовался большой кубъ, коего длина равна прямой AB или аршину, ширина — прямой BC (то-же аршину), а высота содержитъ 16 разъ высоту малаго куба; но высота малаго куба равна вершку,

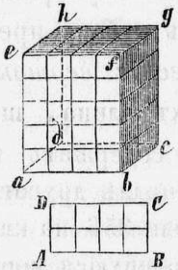
фиг. 267.



слѣдовательно въ высотѣ большаго куба 16 вершковъ, или аршинъ. Этотъ кубъ, коего длина, ширина и высота содержатъ по одному аршину, представляетъ *кубическій аршинъ;* слѣдовательно кубическій аршинъ содержитъ 16 разъ 256, или 4096 кубическихъ вершковъ. Подобнымъ образомъ можно объяснить, что кубическая сажень содержитъ 7 разъ 49, или 343 кубическіе фута, такъ-же 3-жды 9, или 27 кубическихъ аршинъ; въ кубическомъ футѣ 12 разъ 144, или 1728 кубическихъ дюймовъ.

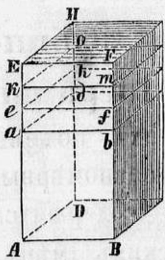
§ 200. Объемъ прямаго параллелопипеда. На прямоугольникѣ ABCD (фиг. 268), коего длина AB равна 4 дюймамъ и ширина BC = 2 дюймамъ, поставьте кубы, коихъ длина, ширина и высота содержатъ по одному дюйму; этихъ кубовъ на прямоугольникѣ ABCD помѣстится столько, сколько разъ нижнее основаніе каждаго куба уляжится въ прямоугольникѣ ABCD, или сколько разъ квадратный дюймъ содержится въ площади ABCD. Извѣстно (§ 95), что для узнанія числа квадратныхъ дюймовъ, содержащихся въ прямоугольникѣ ABCD, должно найти, сколько дюймовъ въ прямыхъ AB и BC, и потомъ перемножить оба полученныя числа; такимъ образомъ прямоугольникъ ABCD содержитъ 4-жды 2, или 8 квадратныхъ дюймовъ; слѣдовательно поставленные на прямоугольникѣ ABCD кубы составятъ 8 кубическихъ дюймовъ. На поставленныхъ кубахъ помѣстите второй, третій, четвертый и наконецъ пятый рядъ такихъ-же кубовъ. Этими поставленными кубами образовался прямой параллелопипедъ или прямая четырегранная *призма.* Вамъ уже извѣстно, что одинъ рядъ поставленныхъ кубовъ составляетъ 8 кубическихъ дюймовъ; слѣдовательно параллелопипедъ *abcdefgh* долженъ содержать 5 разъ 8, или 40 кубическихъ дюймовъ. Итакъ число кубовъ, содержащихся въ одномъ ряду, вы нашли умноженіемъ числа дюймовъ, содержащихся въ ребрѣ *ab*, на число дюймовъ, помѣстившихся въ прямой *bc;* потомъ вы помножили это найденное число квадратныхъ дюймовъ на число рядовъ, или на число дюймовъ, содержащихся въ ребрѣ *ae*, чтобы узнать число всѣхъ кубическихъ дюймовъ. Отсюда вы заключаете: *чтобы узнать, сколько кубическихъ дюймовъ (или кубическихъ аршинъ, или кубическихъ сажень и т. д.) содержится въ прямомъ параллелопипедѣ, вы должны измѣрить его длину, ширину и высоту дюймомъ (или аршиномъ, или саженью и т. д.) и потомъ перемножить найденныя числа.* Полученное число кубическихъ дюймовъ, или кубическихъ аршинъ, или кубическихъ сажень и т. д. составляетъ *объемъ* параллелопипеда.

фиг. 268.



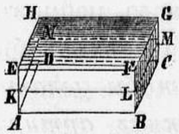
§ 201. Найти объемъ прямаго параллелопипеда ABCDEFGH, коего длина и ширина содержатъ по одному аршину, а высота равна $1^3/_8$ аршина (фиг. 269). На ребрахъ AE, BF, CG, DH отмѣрьте отъ *A* до *a*, отъ *B* до *b*, отъ *C* до *c* и отъ *D* до *d* по одному аршину, и по направленію прямыхъ *ab*, *bc*, *cd* и *ad* отрѣжьте часть *abcd*EFGH отъ параллелопипеда ABCDEFGH; тогда образуется кубъ ABCD*abcd*, коего длина, ширина и высота содержатъ по одному аршину; слѣдовательно онъ представляетъ кубическій аршинъ. Каждое изъ ребръ *a*E, *b*F, *c*G и *d*H раздѣлите на три равныя части и проведите прямыя *ef*, *fg*, *gh* и *eh*. Если вы отъ параллелопипеда *abcd*EFGH отрѣжите часть *efgh*EFGH, то образуется параллелопипедъ *abcdefgh*, составляющій восьмую часть параллелопипеда ABCD*abcd*; слѣдовательно параллелопипедъ *abcd*EFGH, состоящій изъ трехъ равныхъ параллелопипедовъ *abcdefgh*, *efghktmno* и *ktmno*EFGH, составляетъ три-восьмыхъ параллелопипеда ABCD*abcd* или $^3/_8$ кубическаго аршина. Итакъ параллелопипедъ ABCDEFGH содержитъ $1^3/_8$ кубическаго аршина.

фиг. 269.



§ 202. Найти объемъ параллелопипеда ABCDEFGH, коего длина 4 аршина, ширина $2^{1}/_{2}$ аршина и высота $1^{3}/_{4}$ аршина (фиг. 270). Представьте себѣ, что этотъ параллелопипедъ состоитъ изъ параллелопипеда ABCDKLMN, коего высота аршинъ, и изъ параллелопипеда KLMNEFGH, коего высота $^{3}/_{4}$ аршина. Параллелопипедъ ABCDKLMN содержитъ столько кубическихъ аршинъ, сколько квадратныхъ аршинъ (§ 200) заключается въ основаніи ABCD, именно 4 раза $2^{1}/_{2}$, или 10 кубическихъ аршинъ. Параллелопипедъ KLMNEFGH составляетъ (§ 201) $^{3}/_{4}$ параллелопипеда ABCDKLMN или три-четверти 10 кубическихъ аршинъ; слѣдовательно объемъ всего параллелопипеда ABCDEFGH содержитъ $1^{3}/_{4}$ раза 10 кубическихъ аршинъ, или $17^{1}/_{2}$ кубическихъ аршинъ.

фиг. 270.

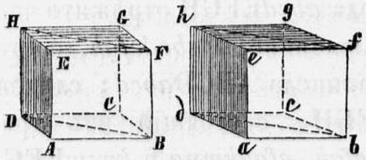


Два послѣдніе примѣра показываютъ, что правило, по которому вычислялся объемъ прямаго параллелопипеда (фиг. 268), относится также къ тѣмъ случаямъ, когда длина, ширина и высота параллелопипеда содержатъ дробныя числа какой-либо линейной мѣры.

§ 203. Объемъ прямаго параллелопипеда, коего основанія суть параллелограмы.

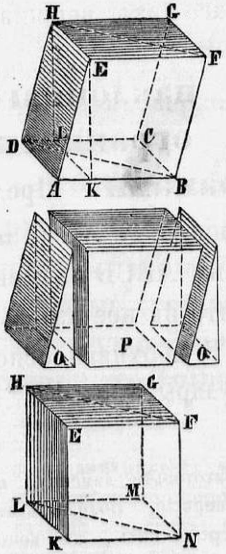
Два тѣла называются равномѣрными, когда ихъ объемы равны, такъ напримѣръ конусъ и шаръ тогда равномѣрны, когда въ конусѣ содержится столько-же кубическихъ мѣръ, сколько ихъ находится въ шарѣ. Въ прямыхъ параллелопипедахъ AG и *ag* (вы можете означить параллелопипедъ двумя буквами, расположенными по концамъ его діагонали) высоты AE и *ae* (фиг. 271) равны, основаніе ABCD прямоугольникъ и основаніе *abcd* параллелограмъ. Такъ какъ объемъ прямаго параллелепипеда, коего основаніе прямоугольникъ, получается умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ площади основанія, на число линейныхъ мѣръ, заключающихся въ высотѣ параллелопипеда (§ 202), то параллелопипеды AG и *ag*, коихъ высоты равны, тогда равномѣрны, когда площади основаній ABCD и *abcd* равны; эти площади, какъ вамъ извѣстно, тогда равны, когда основаніе AB и высота прямоугольника ABCD равны основанію *ab* и высотѣ параллелограма *abcd*. Откуда вы заключаете, что объемъ прямаго параллелопипеда *ag*, коего основаніе параллелограмъ, вычисляется точно такъ, какъ объемъ прямаго параллелопипеда AG, коего высота равна высотѣ параллелопипеда *ag* и основаніе прямоугольникъ, равномѣрный основанію *abcd*.

фиг. 271.



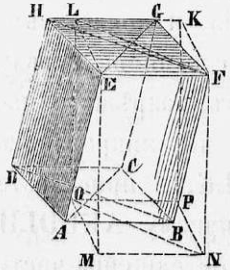
§ 204. Объемъ наклоннаго параллелопипеда, коего основанія и двѣ боковыя грани суть прямоугольники. Въ наклонномъ параллелопипедѣ AG (фиг. 272), коего основанія и боковыя грани ADHE, BCGF прямоугольники, а боковыя грани ABFE и DCGH параллелограмы, опустите перпендукуляры EK и HL на ребра AB и DC нижняго основанія изъ вершинъ верхняго основанія, и представьте себѣ, что точки K и L соединены между собою прямою KL. Потомъ разрѣжьте параллелопипедъ на части по направленію прямыхъ KE, EH, HL и LK, и приставьте отрѣзанную трегранную призму AKEDLH (назовите ее чрезъ Q) къ оставшейся части P параллелопипеда такъ, чтобы ея грань AEHD плотно прилегла къ грани BCGF, и чтобы ребро HE совпало съ ребромъ GF; тогда наклонный параллелопипедъ пре-

фиг. 272.



образуется въ равномѣрный ему прямой параллелопипедъ KLMNEHGF съ прямоугольнымъ основаніемъ. Будетъ-ли этотъ параллелопипедъ прямой? — Ребра EK и FN параллельны, потому-что они перпендикулярны къ одной и той-же прямой KN; эти ребра также перпендикулярны къ прямой EF, потому-что ребра EF и KN параллельны; стало быть EKNF прямоугольникъ. Точно такимъ-же образомъ вы объясните, что HLMG прямоугольникъ. Прямыя EK и HL перпендикулярны къ плоскости ABCD и равны между собою, какъ высоты двухъ равныхъ параллелограмовъ ABFE и DCGH; стало быть эти прямыя также перпендикулярны къ прямой LK, и EKLH прямоугольникъ. Понятно, что и грань NFGM прямоугольникъ. Параллелопипеды ABCDEFGH и KNMLEFGH равномѣрны, потому-что они составлены изъ тѣхъ-же самыхъ частей Q и P. Извѣстно, что объемъ KNMLEFGH получается умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ основаніи EFGH, на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ EK; стало быть для полученія объема параллелопипеда ABCDEFGH вы должны вычислить площадь его основанія ABCD и найденное число помножить на *высоту* EK, т. е. на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины верхняго основанія на ребро нижняго основанія.

Фиг. 273.



§ 205. Объемъ наклоннаго параллелопипеда, ограниченнаго параллелограмами.

Представьте себѣ, что параллелопипедъ AG (фиг. 273) поставленъ основаніемъ ABCD на горизонтальной плоскости, и что на нее изъ выдающихся вершинъ E и F верхняго основанія опущены перпендикуляры EM и FN*).

---

*) Чтобы измѣрить высоту наклонной призмы, приготовьте линейку, въ которой у одного изъ концевъ просверлено маленькое отверстіе. Положивъ линейку на верхнее основаніе призмы, продѣньте чрезъ отверстіе нить, къ концу

Потомъ вообразите, что изъ точекъ E и F опущены перпендикуляры: EL на ребро HG и FK на его продолженіе, и что изъ точекъ L и K опущены перпендикуляры LO и KP на плоскость, на которой поставленъ параллелопипедъ. Проведя прямыя MN, NP, PO и OM, вы получите прямой параллелопипедъ MNPOEFKL съ прямоугольными гранями. Дѣйствительно, прямыя MN, OP, OM и PN, лежащія на горизонтальной плоскости, горизонтальны и перпендикулярны къ вертикальнымъ прямымъ EM, FN, KP и LO; такъ какъ плоскость EFKL горизонтальна, то и прямыя EF, FK, GH и LE горизонтальны и соотвѣтственно параллельны къ прямымъ MN, NP, PO и OM; наконецъ прямыя EL и FK перпендикулярны къ ребру EF, и прямыя MO и NP перпендикулярны къ прямымъ OP и MN. Параллелопипеды AG и MK равномѣрны, потому-что у нихъ общая высота EM и ихъ основанія равномѣрны, т. е. площадь параллелограма EFGH равна площади прямоугольника EFKL (какъ объяснить равномѣрность этихъ двухъ четыреугольниковъ?). Откуда вы заключаете, что объемъ параллелопипеда AG получается умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ его основаніи, на число линейныхъ мѣръ, заключающихся въ его высотѣ, т. е. въ перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины его верхняго основанія на нижнее основаніе.

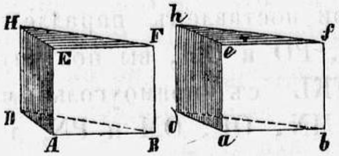
§ 206. Объемъ прямой трегранной призмы.

Вы уже знаете (§ 186), что отъ разсѣченія параллелопипеда по направленію двухъ соотвѣтствующихъ діагоналей (соединяющихъ оконечныя точки двухъ противоположныхъ ребръ) его основаній получаются двѣ трегранныя призмы, изъ которыхъ каждая есть половина параллелопипеда.

которой прикрѣплена какая-нибудь тяжесть. Потомъ опустите нить на столько, чтобы оконечность привѣшанной тяжести коснулась къ горизонтальной плоскости, на которой поставлена призма. Наконецъ измѣрьте длину нити между линейкою и оконечностью тяжести.

Основываясь на этомъ, легко вывести правило для вычисленія объема трегранной призмы. Предположите, что прямая трегранная призма BH (фиг. 274) составляетъ половину параллелопипеда AG (фиг. 271), коего основаніе есть прямоугольникъ. Такъ какъ объемъ этого параллелопипеда получается умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ AE, на число квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ основанiи ABCD, то для объема призмы BH (фиг. 274) вы должны перемножить тѣ-же самыя числа и потомъ найденное число раздѣлить на 2. Для примѣра предположите, что AB = 9 дюйм., AD = 5 дюйм. и AE = 11 дюйм.; тогда для полученія объема призмы, вы помножите 9 на 5, полученное число 45 помножите на 11 и наконецъ раздѣлите найденное число 495 на 2 — получите объемъ призмы BH, равный 247½ куб. дюйм. Вмѣсто этихъ вычисленій вы помножите сперва 9 на 5, потомъ раздѣлите то, что получится, на 2, и наконецъ помножите найденное число на 11; но вы знаете, что перемноженіемъ чиселъ, содержащихся въ прямыхъ AB и AD, и раздѣленіемъ потомъ найденнаго числа на 2 получится площадь треугольника, коего стороны AB и AD взаимно-перпендикулярны; слѣдовательно *объемъ прямой трегранной призмы, коей основаніе прямоугольный треугольникъ, получается умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ ея высотѣ AE, на число квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ ея основаніи ABD.*

фиг. 274.



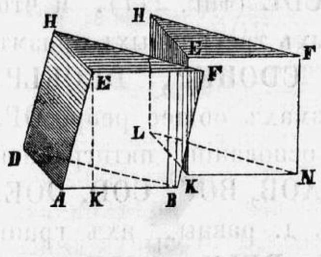
Прямая трегранная призма *bh* (фиг. 274), коей основаніе косоугольный треугольникъ *abd*, составляетъ половину параллелопипеда *bh* (фиг. 271). Такъ какъ этотъ параллелопипедъ равномѣренъ параллелопипеду BH, то и ихъ половины должны быть равномѣрны, т. е. призма *bh* равномѣрна призмѣ BH (фиг. 274). Эти призмы, у которыхъ высоты AE и *ae* равны, тогда равномѣрны, когда ихъ основанія *abd* и ABD

равномѣрны, а для равномѣрности треугольниковъ *abd* и ABD необходимо, чтобы ихъ основанія были равны и высота треугольника *abd* равнялась высотѣ треугольника ABD. Откуда вы заключаете, что объемъ прямой трегранной призмы *abdefh* получается умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ *ae*, на число квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ площади основанія *abd*.

§ 207. Объемъ наклонной трегранной призмы.

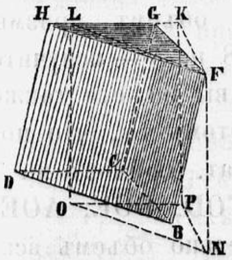
Вамъ извѣстно, что наклонный параллелопипедъ AG (фиг. 272) равномѣренъ прямому параллелопипеду KG; стало быть и половины этихъ параллелопипедовъ равномѣрны, т. е. наклонная призма ABDEFH равномѣрна прямой призмѣ KNLEFH (фиг. 275); но такъ какъ объемъ призмы NH получается умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ KE, на число квадратныхъ мѣръ основанія KNL, то и объемъ наклонной призмы BH получится умноженіемъ числа линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ EK, на число квадратныхъ мѣръ основанія ABD.

фиг. 275.



Половина наклоннаго параллелопипеда ABCDEFGH (фиг. 273) есть наклонная трегранная призма, коей основаніе косоугольный треугольникъ BCD. Параллелопипедъ AG равномѣренъ прямому параллелопипеду MK, слѣдовательно и ихъ половины, т. е. призмы BCDFGH и NPOFKL (фиг. 276), равномѣрны. Такъ какъ параллелограмъ EFGH равномѣренъ прямоугольнику EFKL (фиг. 273), то и треугольники FGH и FKL равномѣрны. Чтобы получить объемъ прямой призмы NPOFKL (фиг. 276), коей основаніе прямоугольный треуголь-

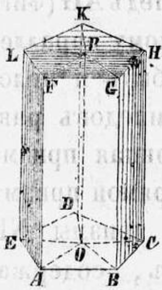
фиг. 276.



никъ, вы должны помножить число квадратныхъ мѣръ основанія на число линейныхъ мѣръ высоты LO; стало быть объемъ наклонной призмы BCDFGH получится умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ его основаніи FGH, на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ его высотѣ LO, т. е. въ прямой, проведенной между основаніями BCD и FGH къ нимъ перпендикулярно.

§ 208. Объемъ многогранной призмы.

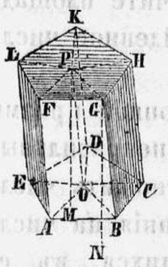
Фиг. 277.



Представьте себѣ прямую призму, коей основаніе правильный пятиугольникъ ABCDE (фиг. 277), и что она составлена изъ равныхъ трегранныхъ призмъ ABOFGP, BCOGHP, CDOHKP, DEOKLP, AEOFLP; въ этихъ призмахъ общее ребро OP, соединяющее центры основаній пятигранной призмы, ихъ основанія AOB, BOC, COD, DOE, AOE, FPG, GPH и т. д. равны, ихъ грани ABGF, BCHG, CDKH, DELK, AELF равны (потому-что они прямоугольники, въ которыхъ стороны AB, FG, BC, GH, CD и т. д. равны и стороны AF, BG, CH и т. д. равны) и наконецъ ихъ грани AOPF, BOPG, COPH, DOPK и EOPL (какъ прямоугольники, коихъ соотвѣтствующія стороны равны). Для примѣра предположите, что площадь AOB равна 32 квад. дюйм. и ребро AF (или высота PO) равна 9 дюйм. Помноживъ 32 на 9, вы узнаете, что объемъ призмы ABOFGP равенъ 288 куб. дюйм. Чтобы получить объемъ призмы ABCDEFGHKL, вы должны помножить 288 на 5 — получите 1440 куб. дюйм. Число 1440 куб. дюйм. вы можете также получить, помноживъ сперва 32 на 5 и потомъ то, что получится, на 9; но отъ умноженія 32 квадрат. дюймовъ на 5 вы получите сумму площадей AOB, BOC, COD, DOE, AOE, или площадь основанія ABCDE; слѣдовательно объемъ всякой прямой призмы, коей основаніе правильный многоугольникъ, получается умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ,

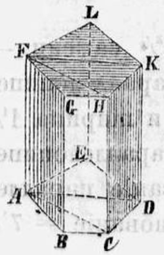
заключающихся въ основаніи, на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ.

Фиг. 278.



Представьте себѣ, что наклонная призма (фиг. 278), коей основаніе правильный пятиугольникъ, составлена изъ равныхъ трегранныхъ призмъ, коихъ общее ребро OP соединяетъ центры O и P; основанія этихъ призмъ равны, ихъ переднія грани ABGF, BCHG, CDKH и т. д. равны (какъ равные параллелограмы) и грани AFPO, BGPO, CHPO и т. д. равны (какъ равные параллелограмы). Чтобы найти объемъ наклонной призмы ABOFGP, вы должны помножить число квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ основаніи ABO, на высоту GN этой призмы. Такъ какъ трегранныя призмы, составляющія призму ABCDEFGHKL равномѣрны и ихъ основанія равны, то у нихъ должна быть общая высота GN. Для примѣра предположите, что площадь ABO равна 24 кв. дюйм. и высота GN равна 7 дюйм.; тогда объемъ призмы ABOFGP получится умноженіемъ числа 24 на 7, и объемъ призмы ABCDEFGHKL получится умноженіемъ найденнаго числа 168 куб. дюйм. на 5. Вмѣсто этихъ вычисленій вы помножите сперва 24 квад. дюйм. на 5 и потомъ найденное число на 7. Такъ какъ отъ умноженія числа 24 квад. дюйм. на 5 получится площадь основанія ABCDE, то вы заключаете, что объемъ наклонной призмы, коей основаніе правильный многоугольникъ, получается умноженіемъ числа квадратныхъ мѣръ ея основанія на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ ея высотѣ.

Фиг. 279.

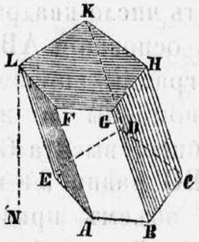


Объемъ прямой призмы (фиг. 279), коей основаніе неправильный многоугольникъ, вычисляется по выше-выведенному правилу. Въ самомъ дѣлѣ, проведя діагонали AC, AD, FH, FK, вы можете себѣ представить, что призма AK составлена изъ трегранныхъ призмъ ABCFGH, ACDFHK, ADEFKL, имѣющихъ общую высоту GB. Предположите, что ребро GB = 8 дюйм., площадь ABC = 24 квад. дюйм., площадь ACD = 30 кв.

дюйм. и площадь ADE = 32 квад. Помноживъ 24 на 8, потомъ 30 на 8 и наконецъ 32 на 8, вы получите объемы призмъ ABCFGH, ACDFHK, ADEFKL. Чтобы получить объемъ призмы AK, вы должны сложить найденные объемы. Вмѣсто этихъ вычисленій вы сперва сложите числа, которыми выражены площади ABC, ACD, ADE — получите площадь основанія ABCDE, потомъ вы помножите найденное число на 8, т. е. на высоту призмы.

Понятно, что для вычисленія объема наклонной призмы (фиг. 280), коей основаніе неправильный многоугольникъ, должно помножить число квадратныхъ мѣръ ея основанія на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ ея высотѣ.

фиг. 280.



§ 209. Объемъ цилиндра.

Принявъ прямой цилиндръ за прямую призму, коей основаніе правильный многоугольникъ съ весьма большимъ числомъ очень малыхъ сторонъ, вы вычисляете его объемъ точно такъ, какъ вычисляется объемъ всякой прямой призмы, т. е. вы помножите число квадратныхъ мѣръ его основанія на число линейныхъ его высоты.

Наклонный цилиндръ есть ничто иное, какъ наклонная призма, коей основаніе правильный многоугольникъ съ весьма большимъ числомъ очень малыхъ сторонъ; слѣдовательно, чтобы найти объемъ этого цилиндра, вы должны вычислить площадь его основанія и потомъ найденное число помножить на его высоту.

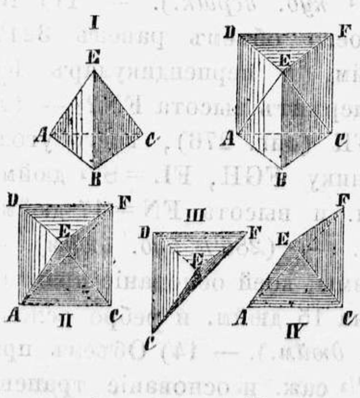
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Найти объемъ куба, коего ребро равно $2^{3}/_{4}$ сажени. — *($20^{51}/_{64}$ куб. саж.)*. — 2) Найти объемъ прямаго параллелопипеда, коего высота 9 вершковъ, длина $1^{3}/_{4}$ аршина и ширина $1^{1}/_{2}$ аршина. — *($1^{61}/_{128}$ кубич. ар.)*. — 3) Въ прямомъ параллелопипедѣ *ag* (фиг. 271) высота равна 6 вершк. и основаніе параллелограмъ, равномѣрный прямоугольнику, коего основаніе = $7^{1}/_{2}$

вершкамъ и высота $8^{3}/_{4}$ вершка; сколько кубическихъ вершковъ въ параллелопипедѣ *ag*? — *($393^{3}/_{4}$ куб. вершка)*. — 4) Вычислить объемъ наклоннаго параллелопипеда AG (фиг. 272), коего основаніе прямоугольникъ, когда извѣстно, что EF = $7^{1}/_{2}$ дюйм., EH = $3^{3}/_{4}$ дюйм., AE = $9^{1}/_{4}$ дюйм. и AK = $3^{3}/_{8}$ дюйм. — *($239^{1}/_{16}$ куб. дюйм.)*. — 5) Объемъ прямаго параллелопипеда содержитъ $208^{1}/_{4}$ куб. вершк.; этотъ параллелопипедъ равномѣренъ прямому параллелопипеду KNMLEFGH (фиг. 272), коего основаніе прямоугольникъ, ребро EF = 6 вершк. и ребро EH = 5 вершк.; найти высоту KE параллелопипеда. — *($6^{113}/_{120}$ вершк.)*. — 6) Вычислить объемъ наклоннаго параллелопипеда AG (фиг. 273), коего ребро AB = 14 дюйм., ребро AE = 10 дюйм., ребро AD = $5^{1}/_{2}$ дюйм., прямая HL = $1^{3}/_{4}$ дюйм. и высота FN = $8^{1}/_{2}$ дюйм. — *($609^{7}/_{8}$ куб. дюйм.)*. — 7) Объемъ прямой призмы ABDEFH (фиг. 274) равенъ $166^{1}/_{4}$ квад. дюйм., высота AE = $9^{1}/_{2}$ дюйм., AB = AD и уголъ BAD прямой; сколько дюймовъ содержитъ ребро BD? — *($8^{6}/_{19}$ дюймовъ)*. — 8) Вычислить объемъ прямой призмы *abdefh* (фиг. 274), коей основаніе равносторонній треугольникъ, высота *ae* = 10 верш. и ребро *ab* = $6^{3}/_{4}$ верш. — *($194^{1}/_{16}$ куб. вершк.)*. — 9) Объемъ призмы ABDEFH (фиг. 275) равенъ $192^{1}/_{2}$ куб. вершк., ребро AB = 7 вершк., ребро AD = 5 вершк. и уголъ BAD = 90°; сколько вершковъ содержитъ высота EK? — *(11 вершковъ)*. — 10) Ребра DB и DC призмы BCDFGH (фиг. 276) равны, высота FN = 14 вершк., ребро BD = 9 вершк. и ребро BC = 7 вершк.; найти объемъ этой призмы. — *($404^{1}/_{4}$ куб. вершк.)*. — 11) Въ призмѣ BCDFGH (фиг. 276), коего объемъ равенъ $321^{3}/_{4}$ куб. дюйм., ребро GH = 11 дюйм. и перпендикуляръ FK = $4^{1}/_{2}$ дюйм.; сколько дюймовъ содержитъ высота FN? — *(13 дюймовъ)*. — 12) Треугольникъ LFK (фиг. 276), коего уголъ LKF = 90°, равномѣренъ треугольнику FGH, FL = $8^{1}/_{2}$ дюйм., FG = $5^{1}/_{4}$ дюйм., HL = $1^{3}/_{8}$ дюйм. и высота FN = 17 дюйм.; найти объемъ призмы BCDFGH. — *($286^{7}/_{8}$ куб. дюйм)*. — 13) Вычислить объемъ прямой призмы, коей основаніе правильный шестиугольникъ, высота равна 15 дюйм. и ребро основанія равно $6^{1}/_{2}$ дюйм. — *($1608^{3}/_{4}$ куб. дюйм.)*. — 14) Объемъ прямой призмы, коей высота равна $1^{1}/_{2}$ саж. и основаніе трапеція

ABGD (фиг. 177), равенъ $1^{79}/_{128}$ куб. саж., ребро AB = 1 саж., ребро DG = $1^{7}/_{8}$ саж. и уголъ BAD = 90°; сколько сажень содержитъ ребро AD? — (*$^{3}/_{4}$ саж.*). — 15) Вычислить объемъ наклонной призмы, коей основаніе правильный восьмиугольникъ и высота равна $7^{3}/_{4}$ ар., когда извѣстно, что ребро основанія равно $4^{1}/_{2}$ ар.? — (*См. рѣшеніе вопроса № 82 на стр. 158 — $158^{13}/_{16}$ куб. ар.*). — 16) Объемъ наклонной призмы, коей основаніе правильный восьмиугольникъ, имѣющій ребро въ 6 вершк., содержитъ 2262 куб. вершк.; сколько вершковъ содержитъ высота этой призмы? — (*13 вершк.*). — 17) Вычислить объемъ цилиндра, коего высота содержитъ 1 футъ и діаметръ основанія равенъ $^{3}/_{4}$ фута. — (*$763^{1}/_{50}$ куб. дюйм.*). — 18) Вычислить объемъ цилиндра, коего высота равна 1 аршину и окружность основанія содержитъ $40^{41}/_{50}$ вершка. — (*$2122^{16}/_{25}$ куб. вершк.*). — 19) Объемъ цилиндра, коего высота равна 18 дюйм., содержитъ 1413 куб. дюйм.; найти діаметръ его основанія. — (*10 дюйм.*) — 20) Объемъ цилиндра, коего радіусъ основанія равенъ $8^{1}/_{2}$ вершк., содержитъ $2722^{19}/_{50}$ куб. вершк.; сколько вершковъ содержитъ его высота? — (*12 вершковъ*). — 21) Вычислить объемъ цилиндрической трубы, длина которой $3^{1}/_{2}$ ар., наружный діаметръ основанія равенъ 11 вершк. и внутренній діаметръ $9^{3}/_{4}$ вершк. — (*$1140^{17}/_{80}$ куб. вершк.*).

фиг. 281.

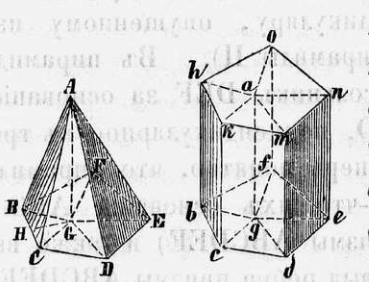


§ 210. Объемъ пирамиды. Представьте себѣ, что въ граняхъ ABED и BCFE прямой трегранной призмы ABCDEF (фиг. 281) проведены діагонали AE и CE, по направленію которыхъ и ребра AC призма разрѣзана на двѣ части. Отрѣзанная часть (I) есть трегранная пирамида EABC, имѣющая вершину E, основаніе ABC, и боковыя грани ABE, BCE и ACE; оставшаяся часть (II) есть четырегранная пирамида EACFD, въ которой прямоугольникъ ACFD основаніе, точка E вершина, и треугольники AEC, CEF, DEF и AED боковыя грани. Въ прямоугольникѣ ACFD проведите діагональ AF и разрѣжьте пирамиду (II) на двѣ части по направленію этой діагонали AF и ребръ AE и EF; эти части обозначены цифрами III и IV. Часть (III) есть трегранная пирамида EADF, имѣющая вершину E, основаніе ADF и боковыя грани EDF, AEF и AED, часть (IV) также трегранная пирамида EACF, въ которой треугольникъ CFA основаніе, точка E вершина и треугольники EAC, EAF и ECF боковыя грани. Пирамиды (III) и (IV) равномѣрны, потому-что ихъ основанія ADF и CFA равны (каждый изъ этихъ треугольниковъ есть половина прямоугольника ACFD) и также высоты равны (перпендикуляръ, опущенный изъ точки E, на основаніе ADF, равенъ перпендикуляру, опущенному изъ точки E на основаніе CFA, потому-что каждый изъ нихъ равенъ перпендикуляру, опущенному изъ точки E на основаніе ACFD пирамиды II). Въ пирамидѣ (III) вы можете принять треугольникъ DEF за основаніе, точку A за вершину и ребро AD, перпендикулярное къ треугольнику DEF, за высоту. Теперь понятно, что пирамиды (I) и (III) равномѣрны, потому-что ихъ основанія ABC и DEF равны (какъ основанія призмы ABCDEF) и также высоты EB и AD равны (какъ боковыя ребра призмы ABCDEF). Итакъ вы узнали, что пирамида (III) равномѣрна пирамидѣ (IV) и въ то-же время также равномѣрна пирамидѣ (I); откуда вы заключаете, что эти три пирамиды, происшедшія отъ разрѣзыванія призмы ABCDEF, равномѣрны между собою, и что слѣдовательно объемъ каждой изъ нихъ есть третья часть объема этой призмы. По этому, чтобы получить объемъ пирамиды (I), вы должны вычислить объемъ такой призмы, коей основаніе равно треугольнику ABC и высота равна высотѣ EB пирамиды, т. е. вы должны вычислить сперва площадь треугольника ABC и потомъ помножить найденное число квадратныхъ мѣръ на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ высотѣ EB; наконецъ вы раздѣлите на 3 послѣднее полученное число. По этому правилу вычислить объемъ пирамиды EABC, коей высота EB равна 10 дюйм., ребро AC равно 8 дюйм. и перпендикуляръ, опущенный изъ точки B на прямую AC, равенъ 5 дюйм. Помноживъ 5 на 8 и раздѣливъ найденное число 40 на 2, вы узнаете, что площадь основанія ABC равна 20 квад. дюйм. Потомъ помножьте 20 квад. дюйм. на 10 — получите 200 куб. дюйм. Наконецъ раздѣливъ 200 куб. дюйм. на 3, вы узнаете, что объемъ пирамиды EABC равенъ $66^{2}/_{3}$ куб. дюйм. *).

§ 211. Объемъ многогранной пирамиды.

Представивъ себѣ, что всякая многогранная призма составлена изъ трегранныхъ призмъ, точно такъ вы можете вообразить, что пирамида ABCDEF составлена изъ трегранныхъ пирамидъ ABCG, ACDG, ADEG, AFEG и ABFG (фиг. 282). Вы уже знаете, что пирамида ABCG составляетъ по объему третью часть призмы *bcghka*, коей высота a*g* равна высотѣ AG и основаніе *bcg* равно основанію BCG; точно также объемъ пирамиды ACDG равенъ $^{1}/_{3}$ объема призмы *cdgkma*, объемъ пирамиды ADEG равенъ $^{1}/_{3}$ объема призмы *degmna*, объемъ пирамиды AEFG равенъ $^{1}/_{3}$ объема *efgnoa* и объемъ пирамиды ABFG равенъ $^{1}/_{3}$ объема *bfghoa*. Понятно, что сумма объемовъ ABCG, ACDG, ADEG, AEFG, ABFG стоставляетъ третью часть суммы объемовъ *bcghka*, *cdgkma*, *degmna*, *efgnoa* и *bfghoa*, или объемъ пирамиды ABCDEF равенъ третьей части объема призмы *bcdefhkmno*. Предположите, что основаніе BCDEF прямой пирамиды правильный пятиугольникъ, ребро BC равно 7 вершк., перпендикуляръ GH = $4^{4}/_{5}$ вершка и высота AG = $22^{1}/_{5}$ вершка. Зная, что объемъ пирамиды ABCDEF составляетъ третью часть призмы *bcdefhkmno*, вы сперва должны вычислить объемъ этой призмы. Для этого вы помножите 7 на 5, найденное число 35 на $4^{4}/_{5}$ и наконецъ вы раздѣлите найденное число 168 на 2 — вы узнаете, что площадь основанія BCDEF равна 84 квад. вершк. Помноживъ 84 на $22^{1}/_{5}$, вы узнаете, что объемъ призмы *bcdefhkmno* равенъ $1864^{4}/_{5}$ куб. вер. Наконецъ вы раздѣлите $1864^{4}/_{5}$ куб. вершк. на 3 — получите объемъ пирамиды, равный $621^{3}/_{5}$ куб. вершк. Изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ вы видите, что *для вычисленія объема полной пирамиды должно помножить число квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ ея основаніи, на число линейныхъ мѣръ, заключающихся въ ея высотѣ, и потомъ раздѣлить найденное число на 3.*

фиг. 282.



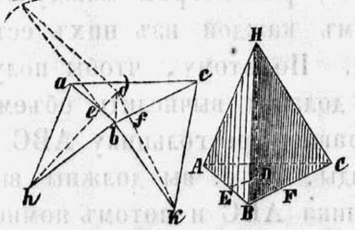
§ 212. Объемъ усѣченной пирамиды.

Требуется вычислить объемъ усѣченной пирамиды (фиг. 257), коей основанія суть правильные шестиугольники, высота *h*H = 9 дюйм., ребро BC = 6 дюйм. и ребро *bc* = $3^{3}/_{4}$ дюйм. Сперва найдите высоту A*h* маленькой полной пирамиды, коей основаніе равно верхнему основанію усѣченной пирамиды. Вы уже знаете (§ 192), что BC : *bc* = AH : A*h*. т. е. высота A*h* во столько разъ меньше высоты AH, во сколько разъ ребро *bc* меньше ребра BC; но такъ какъ

---

*) Чтобы измѣрить высоту HD пирамиды HABC (фиг. 283), начертите треугольникъ *abc*, равный основанію ABC пирамиды, треугольникъ *abh*, равный боковой грани ABH, и треугольникъ *bck*, равный боковой грани BCH. Изъ точки *h* опустите перпендикуляръ *he* на сторону *ab* и изъ точки *k* перпендикуляръ *kf* на сторону *bc*; эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ *d*. Изъ точки *d* къ прямой *hd* возставьте перпендикуляръ и изъ точки *e* радіусомъ, равнымъ прямой *he*, опишите дугу такъ, чтобы она пересѣклась съ перпендикуляромъ *d*H; прямая H*d* равна высотѣ HD пирамиды. Въ самомъ дѣлѣ, треугольникъ H*ed* равенъ треугольнику HED, потому-что стороны H*e* и HE равны, стороны *ed* и ED равны и углы H*de* и HDE прямые; прямыя *de* и DE равны, потому-что треугольники *bde* и BDE равны.

фиг. 283.



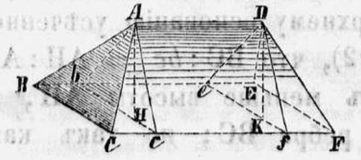
ребро *bc* = $3^3/_4$ дюйм. и ребро BC = 6 дюйм., то ребро *bc* составляетъ $^5/_8$ ребра BC; слѣдовательно и высота A*h* составляетъ $^5/_8$ высоты AH, т. е. представивъ себѣ, что высота AH содержитъ 8 равныхъ частей, вы отдѣлите 5 такихъ частей для высоты A*h*; стало быть высота *h*H должна содержать $^3/_8$ частей высоты AH; но такъ какъ высота *h*H = 9 дюйм., то 9 дюйм. составляютъ $^3/_8$ частей высоты AH; откуда вы узнаете, что высота AH = 24 дюйм. и слѣдовательно высота A*h* = 15 дюйм.

Площадь нижняго основанія усѣченной пирамиды равна (№ 74, стр. 157) $93^3/_5$ кв. дюйм. и площадь ея верхняго основанія равна $36^9/_{16}$ квад. Объемъ полной пирамиды, коей основаніе равно нижнему основанію усѣченной пирамиды и высота AH рывна 24 дюйм., содержитъ $748^4/_5$ куб. дюйм. Объемъ полной пирамиды, коей основаніе равно верхнему основанію усѣченной пирамиды и высота A*h* равна 15 дюйм., содержитъ $182^{13}/_{16}$ куб. дюйм. Наконецъ вычтя $182^{13}/_{16}$ куб. дюйм. изъ $748^4/_5$ куб. дюйм., вы узнаете, что объемъ усѣченной пирамиды равенъ почти 566 куб. дюйм. Изъ этого примѣра вы видите, что *для вычисленія объема усѣченной пирамиды должно вычислить объемъ полной пирамиды, коей основаніе равно верхнему основанію усѣченной пирамиды, и потомъ объемъ полной пирамиды, коей основаніе равно нижнему основанію усѣченной пирамиды; наконецъ должно вычесть объемъ меньшей полной пирамиды изъ объема большей полной пирамиды.*

§ 213. Объемы тѣлъ, составленныхъ изъ призмъ и пирамидъ. Чтобы вычислить объемъ тѣла ABCDEF (фиг. 284), коего непараллельныя основанія ABC и DEF имѣютъ наклонное положеніе относительно параллельныхъ боковыхъ ребръ AD, BE и CF, проведите прямыя A*b*, A*c*, D*e*, D*f* перпендикулярно къ

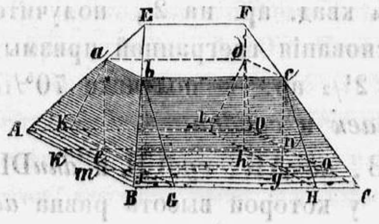
ребру AD и соедините точки *b* и *c* прямою *bc* и точки *e* и *f* прямою *ef*; тогда вы получите прямую трегранную призму A*bc*D*ef* и двѣ четырегранныя пирамиды ABC*cb* и DEF*fe*. Объемъ призмы A*bc*D*ef* получается умноженіемъ площади A*bc* на длину *cf* (или AD); объемы пирамидъ ABC*cb* и DEF*fe*, у которыхъ высоты AH и DK равны, равны объему такой пирамиды, коей высота равна прямой AH, а основаніе прямоугольникъ, равный суммѣ прямоугольниковъ BC*cb* и EF*fe*. Предположите, что грань BCFE прямоугольникъ, ребро AD = $5^1/_2$ дюйм., ребро CF = 10 дюйм., ребро BC = $4^1/_4$ дюйм. и высота AH = $3^1/_2$ дюйм. Вычтя $5^1/_2$ дюйм. изъ 10 дюйм., вы узнаете, что C*c* + *f*F = $4^1/_2$ дюйм. Помножьте $4^1/_2$ дюйм. на $4^1/_4$ дюйм. — получите площадь BC*cb* + EF*fe*, равную $19^1/_8$ квад. дюйм. Помноживъ $19^1/_8$ квад. дюйм. на $3^1/_2$ дюйм. и раздѣливъ найденное число $66^{15}/_{16}$ куб. дюйм. на 3, получите $22^5/_{16}$ куб. дюйм. для объема пирамиды, коей высота равна $3^1/_2$ дюйм. и основаніе составлено изъ прямоугольниковъ BC*cb* и EF*fe*. Помножьте $4^1/_4$ дюйм. на $3^1/_2$ дюйм. и раздѣлите найденное число $14^7/_8$ квад. дюйм. на 2 — получите $7^7/_{16}$ квад. дюйм. для площади треугольника A*bc*. Помноживъ $7^7/_{16}$ квад. дюйм. на $5^1/_2$ дюйм., вы получите $40^{29}/_{32}$ куб. дюйм. для объема призмы A*bc*D*ef*. Наконецъ сложите $22^5/_{16}$ куб. дюйм. и $40^{29}/_{32}$ куб. дюйм. — получите $63^7/_{32}$ куб. дюйм. для объема тѣла ABCDEF.

фиг. 284.



§ 214. Тѣло ABCD*abcd* (фиг. 285), коего параллельныя основанія ABCD и *abcd* суть прямоугольники (или параллелограмы) ABCD и *abcd*, и боковыя грани трапеціи, не есть усѣченная пирамида; это такое тѣло, которое произошло отъ разрѣзыванія тѣла ABECDF, коего ребра AD, BC, EF параллельны, на двѣ равныя части по направленію прямыхъ *ab*, *bc*, *cd*, *ad*, параллельныхъ къ ребрамъ AB, BC, CD, AD. Пред-

фиг. 285.



ставьте себѣ, что изъ вершинъ *a* и *d* опущены перпендикуляры *a*K и *d*L на ребро AD, и изъ вершинъ *b* и *c* перпендикуляры *b*G и *c*H на ребро BC. Проведя прямыя KG и LH, опустите на нихъ перпендикуляры *ae*, *bf*, *dh*, *cg* и проведите прямую *kn* чрезъ точки *e* и *h*, и прямую *mo* чрезъ точки *f* и *g*. Теперь легко себѣ представить, что тѣло ABCD*abcd* составлено изъ: 1) прямой призмы KG*ba*LH*cd*, коей основанія суть трапеціи *ab*GK и *cd*LH, и высота равна ребру *bc*, 2) двухъ прямыхъ трегранныхъ призмъ *bfmaek* и *cgodhn*, коихъ высоты равны ребру *ab*, 3) четырехъ пирамидъ *bmf*GB, *aek*AK, *cgo*CH и *dhn*DL, коихъ высоты равны прямой *ae*. Предположите, что основанія ABCD и *abcd* прямоугольники, *ab* (или *dc*) $= 2^1/_2$ ар., *bc* (или *ad*) $= 7^1/_2$ ар., AB (или CD) $= 6^1/_4$ ар., BC (или AD) $= 18^3/_4$ ар. и *ae* = 5 ар.

1) Понятно, что $KG + ab = 6^1/_4 + 2^1/_2$ ар. или $KG + ab = 8^3/_4$ ар. Помноживъ $8^3/_4$ ар. на 5 ар. и раздѣливъ найденное число $43^3/_4$ квад. ар. на 2, вы узнаете, что площадь трапеціи $abGK = 21^7/_8$ квад. ар. Помножьте $21^7/_8$ квад. ар. на $7^1/_2$ ар. — получите $164^1/_{16}$ куб. ар. для объема призмы KG*ba*LH*cd*.

2) Объемъ призмъ *bfmaek* и *cgodhn* равенъ объему такой призмы, у которой высота равна *ae* и площадь основанія равна суммѣ площадей треугольниковъ *bfm* и *cgo*. Сумма площадей этихъ треугольниковъ равна площади такого треугольника, коего высота равна прямой *bf* (или *ae*) и основаніе равно $mf + go$ или равно $BG + HC$; но $BG + HC = BC - bc$ или $BG + HC = 18^3/_4$ ар. — $7^1/_2$ ар. или $BG + HC = 11^1/_4$ ар. Помноживъ $11^1/_4$ ар. на 5 ар. и раздѣливъ найденное число $56^1/_4$ квад. ар. на 2, получите $28^1/_8$ квад. ар. для площади основанія трегранной призмы. Помножьте $28^1/_8$ квад. ар. на $2^1/_2$ ар. — получите $70^5/_{16}$ куб. ар. для объема призмъ *bfmaek* и *cgodhn*.

3) Объемъ пирамидъ *bmf*GB, *aek*AK, *cgo*CH и *dhn*DL равенъ объему такой пирамиды, у которой высота равна *ae* и площадь основанія равна суммѣ площадей BG*fm*, AK*ek*, CH*go*, LD*nh*. Площадь, равная суммѣ этихъ площадей, получится умноженіемъ длины $BG + HC$ на длину $Bm + kA$; но $Bm + kA = AB - ab$ или $Bm + kA = 6^1/_4$ ар. — $2^1/_2$ ар. или $Bm + kA = 3^3/_4$ ар., и $BG + HC = 11^1/_4$ ар.; слѣдовательно помноживъ $11^1/_4$ ар. на $3^3/_4$ ар., вы получите $42^3/_{16}$ квад. ар. для площади основанія пирамиды. Помножьте $42^3/_{16}$ квад. ар. на 5 ар. и раздѣлите найденное число $210^{15}/_{16}$ куб. ар. на 3 — получите $70^5/_{16}$ куб. ар. для объема пирамидъ.

Наконецъ сложивъ $164^1/_{16}$ куб. ар., $70^5/_{16}$ куб. ар. и $70^5/_{16}$ куб. ар., вы узнаете, что объемъ тѣла ABCD*abcd* равенъ $304^{11}/_{16}$ куб. ар.

§ 215. Объемъ конуса. Вы уже знаете, что конусъ можетъ быть принятъ за пирамиду, у которой основаніе правильный многоугольникъ съ большимъ числомъ очень малыхъ сторонъ. По этому объемъ конуса долженъ быть вычисленъ точно такъ, какъ вычисляется объемъ многогранной пирамиды, т. е. вычисливъ площадь основанія конуса, вы помножите найденное число квадратныхъ мѣръ на высоту конуса и наконецъ то, что получится, вы раздѣлите на 3.

Требуется вычислить объемъ усѣченнаго конуса (фиг. 261), коего радіусъ AO нижняго основанія равенъ $6^3/_4$ вершка, радіусъ *ao* верхняго основанія равенъ $2^1/_2$ вершка и высота *o*O конуса равна 7 вершк. Вы знаете, что этотъ конусъ есть разность между полными конусами LAB и L*ab*; слѣдовательно вычтя объемъ конуса L*ab* изъ объема конуса LAB, вы получите объемъ усѣченнаго конуса *ab*BA. Понятно, что треугольники LAO и L*ao* подобны, а потому $LO : Lo = AO : ao$ или $LO : Lo = 6^3/_4 : 2^1/_2$; откуда вы узнаете, что высота L*o* составляетъ $^{10}/_{27}$ частей высоты LO, т. е. если высота LO содержитъ 27 равныхъ частей, то 10 такихъ частей должно быть въ высотѣ L*o* и слѣдовательно 17 таковыхъ-же частей въ высотѣ Oo; но такъ какъ высота Oo равна 7 вершк., то понятно, что 7 вершк. составляютъ $^{17}/_{27}$ частей высоты LO. Чтобы узнать, сколько вершковъ содержитъ высота LO, вы должны раздѣлить 7 вершковъ на дробь $^{17}/_{27}$ — получите $LO = 11^{2}/_{17}$ вершка и $Lo = 11^{2}/_{17}$ вер. — 7 вер. или $Lo = 4^{2}/_{17}$ вер. Помноживъ $6^{3}/_{4}$ вершка на дробь $^{314}/_{50}$, найденное число на $6^{3}/_{4}$ и то, что получится, раздѣливъ на 2, вы узнаете, что площадь круга АО равна почти $143^{1}/_{16}$ квад. вершк. (вмѣсто $143^{53}/_{800}$). Помножьте $143^{1}/_{16}$ квад. вершк. на $11^{1}/_{8}$ вершк. (вмѣсто $11^{2}/_{17}$) и раздѣлите то, что получится, на 3 — вы узнаете, что объемъ конуса LAB равенъ $530^{1}/_{2}$ куб. вер. (вмѣсто $530^{67}/_{128}$). Помножьте $2^{1}/_{2}$ вершк. на дробь $^{314}/_{50}$, найденное число на $2^{1}/_{2}$ верш. и раздѣлите то, что получится, на 2 — вы узнаете, что площадь круга ao равна $19^{5}/_{8}$ квад. вершк. Помножьте $19^{5}/_{8}$ квад. вершк. на $4^{2}/_{17}$ вершк. и раздѣлите то, что получится, на 3 — вы узнаете, что объемъ конуса Lab равенъ $26^{191}/_{204}$ куб. вер. Наконецъ вычтя $26^{191}/_{204}$ куб. вер. изъ $530^{1}/_{2}$ куб. вершк., вы узнаете, что объемъ усѣченнаго конуса $abBA$ равенъ $503^{115}/_{204}$ куб. вершк.

§ 216. Объемъ шара. Представьте себѣ, что поверхность шара составлена изъ весьма большаго числа очень маленькихъ равныхъ между собою треугольниковъ. Каждый изъ этихъ треугольниковъ можетъ быть принятъ за основаніе пирамиды, коей вершина находится въ центрѣ шара. По этому можно принять, что шаръ составленъ изъ равныхъ трегранныхъ пирамидъ, коихъ общая высота равна радіусу шара, а основанія суть такіе маленькіе треугольники, что они сливаются съ поверхностью шара. Такъ какъ объемъ каждой изъ этихъ пирамидъ получается умноженіемъ площади ея основанія на высоту и раздѣленіемъ найденнаго числа на 3, то объемъ всѣхъ пирамидъ, составляющихъ шаръ, получится умноженіемъ суммы площадей ихъ основаній на ихъ общую высоту и раздѣленіемъ найденнаго числа на 3; но объемъ всѣхъ пирамидъ равенъ объему шара, сумма площадей основаній пирамидъ составляетъ поверхность шара и ихъ общая высота равна радіусу шара; слѣдовательно *объемъ шара получается умноженіемъ квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ поверхности шара, на число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ радіусѣ шара, и раздѣленіемъ найденнаго числа на 3.*

Вычислить объемъ шара, коего радіусъ равенъ $3^{1}/_{2}$ дюймамъ. Помноживъ дробь $^{314}/_{50}$ на $3^{1}/_{2}$ дюйма, вы получите окружность круга, равную $21^{49}/_{50}$ дюйма. Помножьте $21^{49}/_{50}$ дюйма на діаметръ шара, т. е. на 7 дюйм. — получите поверхность шара, равную $153^{43}/_{50}$ квад. дюйм. Помножьте $153^{43}/_{50}$ квад. дюйм. на $3^{1}/_{2}$ дюйм. и раздѣлите найденное число $538^{1}/_{2}$ куб. дюйм. на 3 — получите объемъ шара, равный $179^{1}/_{2}$ куб. дюйм.

§ 217. Представьте себѣ кубъ, коего ребро равно дюйму, потомъ цилиндръ, въ которомъ высота AB и діаметръ CD основанія содержатъ по одному дюйму, и наконецъ шаръ коего діаметръ EF равенъ дюйму. Объемъ куба равенъ кубическому дюйму, объемъ цилиндра равенъ $^{157}/_{200}$ куб. дюйма (§ 209) и объемъ шара равенъ $^{157}/_{300}$ куб. дюйма (§ 216); слѣдовательно, если ребро куба равно діаметру шара, то объемъ шара составляетъ $^{157}/_{300}$ объема куба. Основываясь на этомъ, вычисляйте объемъ шара, коего діаметръ равенъ 5 дюймамъ. Для этого вы опредѣлите объемъ куба, коего ребро содержитъ 5 дюймовъ — получите 125 куб. дюйм. Потомъ вы должны взять $^{157}/_{300}$ частей числа 125 куб. дюйм. — вы узнаете, что объемъ шара равенъ $65^{5}/_{12}$ куб. дюйм.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ.

1) Въ трегранной пирамидѣ высота равна 9 вершк. и основаніе треугольникъ, коего высота 3 вершка и основаніе 5 вершковъ; найти объемъ призмы, коей основаніе и высота соотвѣтственно равны основанію и высотѣ этой пирамиды. — *($67^{1}/_{2}$ куб. вер.)*. — 2) Вычислить объемъ правильной пирамиды,

коей основаніе равно основанію куба и высота равна ребру куба, когда извѣстно, что поверхность этого куба равна $73\frac{1}{2}$ квад. ар. — *($14\frac{7}{24}$ квад. ар.)*. — 3) Въ пирамидѣ ABCDFG (фиг. 257) основаніе *bcdfg* отстоитъ отъ основанія BCDFG на 14 дюймовъ, ребро BC = 6 дюйм., ребро *bc* = $2\frac{1}{2}$ дюйм. и основанія BCDFG и *bcdfg* правильные шестиугольники; найти объемъ этой пирамиды. — *(738 куб. дюйм.)*. — 4) Какую высоту должно дать полной четырегранной пирамидѣ, коей основаніе квадратъ со стороною въ $1\frac{1}{2}$ вершка, чтобы объемъ этой пирамиды содержалъ 6 куб. вершковъ? — (*8 вершковъ*). — 5) Вычислить ребро квадратнаго основанія правильной четырегранной пирамиды, коей объемъ содержитъ 768 куб. верш. и высота равна 12 верш. — (*Почти 14 вершк.*). — 6) Боковая поверхность правильной четырегранной пирамиды содержитъ $56\frac{1}{4}$ квад. вершк. и бокъ квадратнаго основанія равенъ $2\frac{1}{2}$ вершк.; найти объемъ этой пирамиды. — (*$22\frac{11}{12}$ куб. вершк.*) — 7) Въ (фиг. 284) ребро AD = 10 ар., ребро BE = 16 ар., ребро BC = $5\frac{1}{2}$ ар., высота AH = 4 ар. и основаніе BCFE прямоугольникъ; вычислить объемъ тѣла ABCDEF. — (*154 куб. ар.*). — 8) Въ (фиг. 285) основанія ABCD и *abcd* прямоугольники, ребро *bc* = 8 саж., ребро *ab* = $4\frac{1}{2}$ саж., ребро BC = 13 саж., ребро AB = 7 саж. и высота *bf* = 5 саж.; вычислить объемъ тѣла ABCD*abcd*. — (*$307\frac{1}{12}$ куб. саж.*). — 9) Основаніе конуса, коего высота равна 8 фут., содержитъ 6 квад. фут.; вычислить объемъ этого конуса. — 10) Вычислить объемъ конуса, коего высота равна 5 фут. и діаметръ основанія равенъ 3 фут. — (*$11\frac{31}{40}$ куб. фут.*). — 11) Окружность основанія конуса содержитъ $6\frac{1}{4}$ фута и сторона конуса равна $5\frac{1}{2}$ фут.; вычислить объемъ этого конуса. — (*Почти $5\frac{4}{5}$ куб. фут.*). — 12) Объемъ конуса, коего высота равна 12 вершк., содержитъ $176\frac{5}{8}$ куб. вершк.; вычислить діаметръ основанія этого конуса. — (*$7\frac{1}{2}$ вершк.*). — 13) Объемъ конуса, коего радіусъ основанія равенъ $3\frac{3}{4}$ вершка, содержитъ $110\frac{25}{64}$ куб. вершк.; сколько вершковъ въ высотѣ этого конуса? — (*$7\frac{1}{2}$ вершк.*). — 14) Боковая поверхность конуса, коего радіусъ основанія равенъ $4\frac{1}{6}$ дюйма, содержитъ $122\frac{1}{9}$ квад. дюйм.; вычислить объемъ этого конуса. — (*$151\frac{277}{648}$ куб. дюйм.*). — 15) Въ усѣченномъ конусѣ (фиг. 261) радіусъ *ao* = 5 дюйм., радіусъ AO = 7 дюйм. и высота O*o* = 9 дюйм.; вычислить объемъ этого конуса. — (*$1026\frac{39}{50}$ куб. дюйм.*). — 16) Сторона A*a* усѣченнаго конуса равна 5 дюйм., его діаметръ *ab* = $8\frac{1}{4}$

дюйм. и діаметръ AB = $10\frac{1}{2}$ дюйм.; вычислить объемъ этого конуса. — (*Почти $329\frac{1}{4}$ куб. дюйм.*). — 17) Вычислить объемъ шара, коего радіусъ равенъ $2\frac{1}{4}$ вершка. — (*Почти $47\frac{11}{16}$ куб. дюйм.*). — 18) Вычислить объемъ шара, коего поверхность равна $26\frac{1}{4}$ кв. вершк. — (*Почти $12\frac{3}{4}$ куб. вершк.*). — 19) Найти объемъ земнаго шара, когда извѣстно, что діаметръ экватора равенъ 1719 милямъ. — (*$2658312465\frac{1}{5}$ куб. дюйм.*). — 20) Окружность большаго круга шара содержитъ $10\frac{1}{2}$ дюйм.; вычислить объемъ этого шара. — (*Почти $19\frac{1}{2}$ куб. дюйм.*). — 11) Площадь большаго круга шара содержитъ $34\frac{8}{9}$ квад. дюйм.; вычислить объемъ этого шара. — (*$155\frac{5}{81}$ куб. дюйм.*). — 22) Узнать, на сколько объемъ усѣченной пирамиды, коей высота *h*H = $7\frac{1}{2}$ верш., основанія ABC, *abc* равносторонніе треугольники, ребро AB = $8\frac{3}{4}$ верш. и ребро *ab* = $4\frac{1}{2}$ верш., больше объема правильной призмы, коей основаніе равно треугольнику *abc* и высота равна высотѣ *h*H. — (*На $83\frac{37}{136}$ куб. дюйм.*).

ОТДѢЛЪ X.

Задачи, относящіяся къ послѣднему отдѣлу.

1) Сколько ведръ воды содержитъ водоемъ, длиною въ 20 футъ, шириною въ 15 футъ и глубиною въ 4 фута, когда извѣстно, что ведро содержитъ почти $750\frac{1}{2}$ кубическихъ дюймовъ? — *(Почти 2763 ведра)*.

2) Извѣстно, что на окраску 10 квад. саж. полагается 15 фунтовъ бѣлилъ. Сколько потребно бѣлилъ на окраску 38 столбовъ, у которыхъ высота равна $3\frac{1}{2}$ ар. и основанія суть правильные шестиугольники со сторонами въ 3 вершка? — *($24\frac{15}{16}$ фунта бѣлилъ)*.

3) Въ сараѣ, коего длина 45 футъ и ширина 28 футъ, насыпанъ овесъ, занимающій $3\frac{1}{2}$ фута высоты сарая; сколько четвертей овса помѣщено въ сараѣ, когда извѣстно, что четверикъ вмѣщаетъ въ себѣ 1600 кубич. дюймовъ? — *($595\frac{7}{20}$ четверти)*.

4) 2304 кубическіе фута мелкаго булыжнаго камня уложены такимъ образомъ, что они въ вышину занимаютъ 8 футовъ и въ ширину 4 фута; сколько футовъ длины занимаютъ эти каменья? — *(72 фута).*

5) Въ больницѣ устроена палата, длиною въ 7 саж., шириною въ 10 ар. и высотою въ $5^1/_2$ ар. Сколько больныхъ можно помѣстить въ этой палатѣ, если на каждаго полагается $1^1/_2$ куб. саж. воздуха? — *(28 человѣкъ).*

6) Сколько потребно каменнаго щебня на шоссе, длина котораго 2 версты и ширина $2^1/_2$ сажени, когда щебня полагается насыпать вышиною въ 8 дюймовъ? — *($238^2/_{21}$ куб. саж. щебня).*

7) Нанято 15 землекоповъ для вырытія канавы, длиною въ 115 саж., шириною въ $4^1/_2$ ар. и глубиною въ $2^1/_4$ ар. Во сколько времени эта работа можетъ быть окончена, когда извѣстно, что рабочій въ часъ можетъ вырыть 36 куб. футовъ земли? — *(Въ 82 часа $10^5/_8$ минуты).*

8) Крестьянинъ уложилъ картофель въ кладовой, длина которой $2^3/_4$ ар., ширина 1 ар. 5 вершковъ и высота 1 саж. Сколько у него картофелю въ кладовой, когда извѣстно, что четверикъ вмѣщаетъ въ себѣ 1600 куб. дюймовъ? — *(18 четвертей и почти $4^9/_{16}$ четверика).*

9) Помѣщикъ заказалъ деревянный ящикъ, вышиною въ 5 футовъ; этотъ ящикъ, коего основаніе есть квадратъ, долженъ вмѣщать въ себѣ 12 четвертей. Какой длины и ширины долженъ быть этотъ ящикъ, когда извѣстно, что четверикъ содержитъ 1600 куб. дюймовъ? — *($4^1/_3$ фута).*

10) Граммъ (le gramme) равенъ вѣсу кубическаго сантиметра воды, а килограммъ содержитъ 1000 граммовъ. Представивъ себѣ кубъ, вмѣщающій въ себѣ килограммъ воды, узнайте, сколько метровъ содержитъ ребро внутренности этого куба. — *($^1/_{10}$ метра или 1 дециметръ).*

Метръ, французская мѣра длины, равенъ одной десятимилліонной части четверти земнаго миридіана. Декаметръ равенъ 10 метрамъ, эктометръ равенъ 100 метрамъ, километръ равенъ 1000 метрамъ, миріаметръ равенъ 10000 метрамъ. Десиметръ равенъ $^1/_{10}$ метра, сантиметръ равенъ $^1/_{100}$ метра, миллиметръ равенъ $^1/_{1000}$ метра. — Метръ равенъ почти $1^2/_5$ аршина. — Граммъ есть мѣра вѣса. Декаграммъ равенъ 10 граммамъ, эктограммъ равенъ 100 граммамъ, килограммъ равенъ 1000 граммамъ, миріаграммъ равенъ 10000 граммамъ. Десиграммъ равенъ $^1/_{10}$ грамма, сантиграммъ равенъ $^1/_{100}$ грамма, миллиграммъ равенъ $^1/_{1000}$ грамма. — Граммъ равенъ почти $^{27}/_{64}$ золотника.

11) Желѣзная полоса, длиною въ 16 футъ, имѣетъ квадратное основаніе съ стороною въ 8 дюймовъ; сколько вѣсу въ этой полосѣ, когда извѣстно, что вѣсъ 25 кубическихъ дюймовъ воды равенъ фунту и что вѣсъ 50 кубическихъ дюймовъ желѣза равенъ вѣсу 389 кубическихъ дюймовъ воды? — *($95^3/_5$ пуда).*

12) При температурѣ 13 градусовъ выше нуля найдено, что длина желѣзной полосы равна $2^1/_2$ саж., ея толщина равна $2^1/_2$ дюймамъ и ширина равна $3^1/_4$ дюйма. Вычислить объемъ этой-же полосы при 25 градусахъ тепла, когда извѣстно, что при каждомъ градусѣ выше нуля желѣзо разширяется на $^1/_{273}$ своего объема. — *($1781^1/_4$ куб. дюйма).*

13) Въ бассейнъ, коего длина 64 фута, ширина 45 футовъ и глубина $8^1/_2$ футовъ, проведены двѣ трубы. Посредствомъ верхней трубы бассейнъ наполняется водою въ $5^1/_2$ часовъ, а нижнею трубою бассейнъ выпоражнивается въ $6^3/_4$ часа. Сколько кубическихъ футовъ воды вливается въ минуту въ этотъ бассейнъ, когда обѣ трубы открыты? — *($13^{73}/_{99}$ куб. фут. воды).*

14) Изъ куска чернаго дерева, имѣющаго видъ куба, требуется выточить шары, діаметромъ въ 2 дюйма, такъ, чтобы каждый шарикъ образовался изъ кубика, ребро котораго было бы четвертью дюйма больше сказаннаго діаметра. Сколько получится такихъ шариковъ, когда ребро большаго куба содержитъ $1^1/_2$ фута? — *(512 шариковъ).*

15) Давленіе воздуха на какую-либо поверхность равно вѣсу ртутной призмы, коей основаніе равно этой поверхно-

сти и высота равна высотѣ ртутнаго столба въ барометрѣ. Сколькимъ пудамъ равно давленіе, произведенное воздухомъ на человѣка, поверхность тѣла котораго равна 14 квад. фут., когда извѣстно, что высота ртути въ барометрѣ равна 21 дюйму, вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника и вѣсъ 5 куб. дюйм. ртути равенъ вѣсу 68 куб. дюйм. воды? — *(Почти 575$^{3}/_{4}$ пуда).*

16) Основываясь на предъидущей задачѣ (№ 15), опредѣлить вѣсъ, равный давленію, произведенному воздухомъ на поверхность круга, окружность котораго содержитъ $16^{1}/_{2}$ аршинъ, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника, высота ртути въ барометрѣ равна $27^{1}/_{2}$ дюйм. и вѣсъ 5 кубическихъ дюймовъ ртути равенъ вѣсу 68 куб. дюйм. воды. — *(Почти 6356 пудъ).*

17) Сколько кубическихъ дюймовъ воды получается при подъемѣ стержня насоса, когда внутренній діаметръ трубы насоса равенъ $6^{3}/_{4}$ дюйма и подъемъ стержня равенъ $15^{1}/_{4}$ дюйм.? — *(Почти 545$^{1}/_{2}$ куб. дюйм. воды).*

18) Сколько сажень дровъ, длиною въ 12 вершковъ, помѣстится въ сараѣ, коего длина 8 ар., ширина 5 ар. и высота $4^{1}/_{2}$ ар.? — *(26 сажень дровъ съ оставленіемъ небольшаго прохода).*

19) Цилиндрическій чанъ, коего окружность содержитъ 11 футовъ, наполненъ водою на 4 фута высоты; въ этотъ чанъ опущенъ кусокъ мѣди неправильной формы, вслѣдствіе чего вода поднялась на $4^{1}/_{2}$ дюйма. Опредѣлить объемъ этого куска мѣди. — *(6242$^{106}/_{157}$ куб. дюйма).*

20) Въ цилиндрическомъ сосудѣ, діаметръ котораго равенъ $10^{1}/_{2}$ дюйм., находится вода, въ которую былъ опущенъ камень неправильной формы; этотъ камень поднялъ уровень воды на $1^{1}/_{2}$ фута. Опредѣлить объемъ этого камня. — *(Почти 1558 куб. дюйм.).*

21) Требуется покрыть квадратно-аршинными желѣзными листами крышу павильона, имѣющую видъ полушара,

коего наружный діаметръ равенъ $4^{2}/_{3}$ сажени; сколько потребно желѣзныхъ листовъ? — *(Почти 308 листовъ).*

22) Сколько жести потребно на дно и боковыя стѣны параллелопипедическаго ящика съ квадратнымъ основаніемъ, чтобы вмѣстимость ящика равнялась гарнцу и высота $^{3}/_{4}$ фута, когда извѣстно, что четверикъ вмѣщаетъ въ себѣ 1600 куб. дюйм.? — *(189$^{7}/_{9}$ квад. дюйм. жести).*

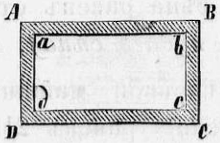
23) Изъ жести требуется приготовить такой цилиндрическій сосудъ съ крышею, чтобы его вмѣстимость равнялась ведру и высота содержала $1^{1}/_{8}$ фута; сколько квадратныхъ дюймовъ жести потребно на сдѣланіе этого сосуда, когда извѣстно, что вмѣстимость ведра равна $750^{3}/_{5}$ куб. дюйма? — *(467$^{3}/_{5}$ квад. дюйм. жести).*

24) Для стѣнныхъ часовъ требуется приготовить мѣдную гирю, вѣсомъ въ $2^{1}/_{2}$ фунта и длиною въ $5^{1}/_{2}$ дюймовъ; сколько дюймовъ должно дать діаметру основанія этой гири, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника и вѣсъ 5 куб. дюйм. желтой мѣди равенъ вѣсу 42 куб. дюйм. воды? — *(Почти 1$^{1}/_{3}$ дюйма).*

25) Изъ жести заказанъ цилиндрическій сосудъ, который долженъ вмѣщать въ себѣ 3 штофа и коего высота должна равняться 7 дюймамъ. Вычислить радіусъ дна этого сосуда, когда извѣстно, что вмѣстимость штофа равна $75^{1}/_{20}$ куб. дюйма. — *(3$^{7}/_{33}$ дюйма).*

26) Прямоугольное мѣсто ABCD (фиг. 286), длиною AB въ 72 саж. и шириною AD въ 46 саж., требуется обвести стѣною изъ крупнаго булыжнаго камня, высота которой должна равняться $3^{1}/_{2}$ ар. и толщина $^{3}/_{4}$ ар. Сколько потребно камня на кладку этой стѣны, когда на 4 куб. саж. стѣны полагается $4^{1}/_{2}$ куб. саж. камня? — *(77$^{7}/_{64}$ куб. саж. камня. — Сперва должно вычислить площадь ABCD и потомъ площадь abcd, въ которой сторона ab (или dc)*

Фиг. 286.



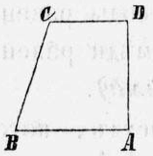
равна длинѣ AB безъ удвоенной толщины стѣны и сторона ad (или bc) равна длинѣ AD безъ удвоенной толщины стѣны. Разность между этими площадями равна площади основанія стѣны).

27) Сколько потребно желѣзныхъ листовъ, длиною въ 2 ар. и шириною въ 1 ар., на сдѣланіе футляровъ 16 круглымъ Унтормаркскимъ печамъ, высотою въ 12 фут. и въ діаметрѣ 3 фута каждая печь? — *(Почти 166$^{1}/_{10}$ листа).*

28) Требуется вырыть яму, глубиною въ 3$^{3}/_{4}$ фута и шириною въ 8$^{1}/_{2}$ футовъ, для гашенія кубической сажени обозженнаго известковаго камня. Сколько футовъ должно дать длинѣ этой ямы, когда извѣстно, что гашеніемъ объемъ известковаго камня увеличивается втрое? — *(Почти 32$^{2}/_{7}$ фута).*

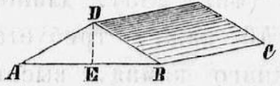
29) Сколько кирпичей можно помѣстить въ сараѣ, въ которомъ стѣна AD (фиг. 287), длиною въ 6 ар., перпендикулярна къ стѣнамъ AB и DC, когда извѣстно, что длина кирпича 6, ширина 3 и толщина 1$^{1}/_{2}$ вершк., длина стѣны AB = 7$^{3}/_{4}$ ар., длина стѣны CD = 5 ар. и высота сарая равна 3$^{3}/_{8}$ ар.? — *(19584 кирпича).*

фиг. 287.



30) Подъ двускатною крышею (фиг. 288), имѣющею видъ трегранной призмы съ параллельными основаніями, помѣщенъ сѣнникъ, длиною BC въ 42 ар. и шириною AB въ 10$^{1}/_{2}$ ар. Сколько пудовъ сѣна помѣстится на этомъ сѣнникѣ, когда подъемъ DE крыши равенъ сажени и вѣсъ кубической сажени сѣна равенъ отъ 15 до 20 пудовъ? — *(Отъ 367$^{1}/_{2}$ до 490 пудовъ сѣна).*

фиг. 288.



31) Высота цилиндрическаго котла паровой машины содержитъ 4$^{1}/_{2}$ фута и діаметръ его основанія равенъ 2$^{1}/_{6}$ фута. Сколько воды должно нагрѣвать до 80 градусовъ тепла, чтобы ея парами наполнить этотъ котелъ, когда извѣстно, что объемъ, занимаемый парами, въ 1700 разъ больше объема воды, образующей эти пары? — *(Почти 17 куб. дюйм. воды. — Вычисливъ вмѣстимость котла, вы раздѣлите найденное число на 1700).*

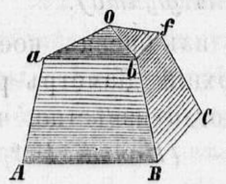
32) Сколько потребно булыжнаго камня на обложеніе цилиндрическаго колодца, глубиною въ 2 сажени, при толщинѣ кладки въ 2 фута, когда внутренній діаметръ колодца равенъ одной сажени и на 6 куб. саж. кладки полагается 7 куб. саж. булыжнаго камня? — *(2$^{121}/_{175}$ куб. саж. булыжнаго камня).*

33) Требуется оштукатурить внутренность корридора, коего длина равна 5 саж. и ширина 3$^{3}/_{4}$ ар.; этотъ корридоръ покрытъ сводомъ, коего дуга есть полуокружность и высота опорныхъ стѣнъ равна 3$^{1}/_{2}$ ар. Сколько потребно алебастру на эту штукатурку, когда извѣстно, что на квадратную сажень стѣны полагается 20 фунтовъ алебастру? — *(Почти 10$^{3}/_{4}$ пуда).*

34) Сколько потребно изразцовъ, длиною въ 6 вершк. и шириною въ 4 вершка, на сдѣланіе 15 голландскихъ печей, длиною и шириною по 1$^{1}/_{2}$ ар. и вышиною въ 3$^{1}/_{2}$ ар., когда три печи одною стѣнкою прислонены къ стѣнамъ зданія, а остальныя двумя стѣнками, и когда $^{1}/_{24}$ всего количества изразцовъ полагается на изломъ? — *(1925 изразцовъ).*

35) Для самой чистой полировки полагается 12 фунтовъ свинцу на каждую квадратную сажень гранита. Сколько потребно свинцу для полировки боковой поверхности гранитнаго памятника (фиг. 289), нижняя длина AB котораго равна 1$^{3}/_{4}$ ар., нижняя ширина BC = 1 ар. 5 вершк., верхнее ребро ab = 1$^{1}/_{4}$ ар., ребро bf = 15 вершк., ребро Aa = 3 ар., ребро ao = 15 вершк.? — *(23$^{1}/_{10}$ фунта свинцу).*

фиг. 289.

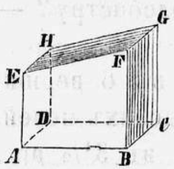


36) Сколько ведръ воды вмѣщаетъ въ себѣ котелъ, имѣющій форму полушара, коего наружная окружность основанія содержитъ $7^{10}/_{21}$ фута и толщина котла равна 1 дюйму, когда извѣстно, что ведро содержитъ $750^{1}/_{2}$ кубич. дюймовъ? *(Почти $6^{1}/_{2}$ ведръ).*

37) Для лампы требуется приготовить шарообразный стекляный резервуаръ, въ которомъ предполагается вмѣщать масло; наружному діаметру этого резервуара желаютъ дать $3^{1}/_{2}$ дюйма, и толщинѣ стекляной оболочки $^{1}/_{8}$ дюйма. Сколько масла можно вмѣщать въ резервуарѣ, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ зол. и вѣсъ 100 куб. дюйм. масла равенъ вѣсу 92 куб. дюйм. воды? — *(Почти $63^{7}/_{15}$ золотника).*

38) Сколько вѣсу въ гранитномъ камнѣ (фиг. 290), въ которомъ ребро AB (или CD) равно $1^{1}/_{4}$ ар., ребро AE (или DH) равно 10 вершк., ребро BF (или CG) равно 1 ар. 3 вершк., ребро AD (или BC или EH или FG) равно 12 вершк. и грани ABFE, DCGH, ADHE и BCGF перпендикулярны къ основанію ABCD, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ золотника и гранитъ во столько разъ тяжелѣе воды, во сколько разъ 341 больше 125? — *($50^{225}/_{256}$ пуда).*

Фиг. 290.



39) Требуется окрасить 12 желѣзныхъ конусообразныхъ крышъ, коихъ діаметръ основанія равенъ 8 ар. и наклонное разстояніе вершины крыши до основанія (сторона конуса) равно 5 ар. Сколько потребно коноплянаго масла на окраску этихъ крышъ, когда на 15 квад. саж. желѣза полагается 25 фунтовъ коноплянаго масла? — *($139^{5}/_{9}$ фунта).*

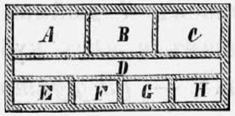
40) Сколько получится сажень дровъ изъ бревна, коего нижній діаметръ равенъ $2^{1}/_{2}$ футамъ, верхній діаметръ равенъ $1^{3}/_{4}$ фута и длина равна 46 фут., когда извѣстно, что сажень дровъ занимаетъ $6^{3}/_{4}$ куб. ар.? — *(Почти $1^{316}/_{343}$ сажени дровъ).*

41) Вычислить объемъ свода, внутренняя дуга котораго, содержащая 45 градусовъ, описана радіусомъ въ $8^{1}/_{2}$ футовъ, когда толщина свода равна 2 футамъ и его длина 3 саженямъ. — *($313^{43}/_{200}$ куб. фут.).*

42) Круглая полоса желѣза, длиною въ $8^{3}/_{4}$ фута и діаметромъ въ $3^{1}/_{2}$ дюйма, требуется перековать въ четырегранную полосу, длиною въ 9 футовъ и толщиною въ 2 дюйма. Какой ширины будетъ эта полоса, когда извѣстно, что ковкою желѣзо уменьшается на $^{1}/_{15}$ своего объема? — *(Почти $4^{313}/_{864}$ дюйма).*

43) Требуется узнать, сколькими голландскими печами должно нагрѣвать воздухъ въ нижнемъ этажѣ деревяннаго дома (фиг. 291), въ которомъ ширина комнатъ A, B, C равна 7 ар., ширина комнатъ E, F, G, H равна 6 ар., ширина корридора D равна 2 ар., длина комнаты A равна $9^{1}/_{2}$ ар., длина комнаты B равна 8 ар., длина комнаты C равна 7 ар., длина комнаты E = $7^{1}/_{2}$ ар., длина комнаты F = $6^{1}/_{2}$ ар., длина комнаты G = 6 ар., длина комнаты H = $4^{1}/_{4}$ ар., длина корридора D = 25 ар. и высота всѣхъ покоевъ равна 5 ар., когда извѣстно, что голландская печь нагрѣваетъ 15 куб. саж. воздуха. — *(5 печекъ).*

Фиг. 291.



44) Сколько пудовъ желѣза потребно на оковку 36 колесъ, которыхъ діаметръ равенъ 4 фут. и ширина равна $2^{1}/_{2}$ дюйм., когда толщина оковки должна равняться $^{1}/_{2}$ дюйма и вѣсъ кубическаго дюйма желѣза равенъ $29^{9}/_{10}$ золотника? — *(Почти $53^{1}/_{3}$ пуда).*

45) Для химической лабораторіи требуется приготовить стеклянную воронку, которая должна вмѣщать въ себѣ фунтъ воды. Какой глубины должно сдѣлать эту воронку при ея наибольшемъ внутреннемъ діаметрѣ въ 5 дюймовъ, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника? — *(Почти $3^{4}/_{5}$ дюйма).*

46) Заказано 7 оловянныхъ блюдъ, діаметромъ въ $1^{1}/_{2}$ фута и толщиною въ $^{2}/_{5}$ дюйма. Сколько потребно олова на эти блюда, когда извѣстно, что вѣсъ кубическ. дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золот. и олово во столько разъ тяжелѣе воды, во сколько разъ 7291 больше 1000? — *(5 пудовъ и (почти) 8 фунтовъ).*

47) Для водопровода, длиною въ 652 сажени, требуется приготовить свинцовыя трубы, наружный діаметръ которыхъ долженъ равняться $2^{1}/_{2}$ дюйм. и внутренній діаметръ $2^{1}/_{5}$ дюйма. Сколько потребно свинцу на эти трубы, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника и свинецъ во столько разъ тяжелѣе воды, во сколько разъ 1419 больше 125? — *(Почти $688^{3}/_{20}$ пуда).*

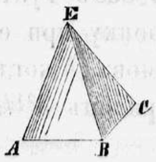
48) Сколько вѣсу въ стеклянномъ шарѣ, наполненномъ водою, когда его внутренній діаметръ равенъ 7 дюймамъ, его вѣсъ безъ воды равенъ 245 золотникамъ и вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника. — *(9 фунтовъ и (почти) 70 золот.).*

49) Прямоугольное поле, длиною въ $^{1}/_{2}$ версты и шириною въ 130 саж., куплено для добыванія торфа на 6 футовъ глубины. Сколько получится кусковъ торфа, когда $^{1}/_{10}$ часть всего количества полагается на бракъ и 8 кусковъ составляютъ 1 кубическій футъ? — *(1074937 кусковъ).*

50) Требуется оштукатурить внутренность павильона, построеннаго въ видѣ полуцилиндра съ куполомъ; вся высота павильона 8 саж. и діаметръ основанія $9^{1}/_{2}$ саж. Сколько потребно извести на эту штукатурку, когда на 20 квад. саж. стѣны полагается 8 пудовъ извести? — *($47^{91}/_{125}$ пуда).*

51) Сколько вѣсу въ пирамидѣ изъ песчаннику (фиг. 292), коей боковое ребро AE содержитъ 4 ар., ребро AB прямоугольнаго основанія равно 1 ар. 6 вершк. и ребро BC равно 1 ар. 2 вершк., когда вѣсъ кубическаго вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ зол. и песчанникъ во столько разъ тяжелѣе воды, во сколько разъ 211 больше 100? — *(Почти 93 пуда).*

фиг. 292.

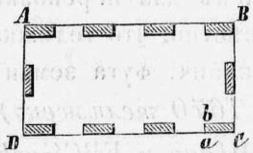


52) Для машины требуется выточить мѣдный коническій клапанъ, вѣсомъ въ 3 фунта. Сколько дюймовъ долженъ содержать діаметръ основанія этого конуса, когда его высота должна равняться 4 дюйм. и вѣсъ кубич. дюйма желтой мѣди равенъ $32^{27}/_{100}$ золотника? — *(Почти $2^{65}/_{71}$ дюйма).*

53) Въ сажени сосновыхъ дровъ, коихъ длина 12 вершковъ, пустое пространство между полѣньями составляетъ $^{111}/_{500}$ объема, занимаемаго дровами. Сколько коробовъ угля получится изъ 20 сажень сосновыхъ дровъ, когда извѣстно, что коробъ содержитъ $22^{58}/_{125}$ куб. вершк., и переугливаніемъ добывается угля 25% по объему дровъ? — *($4787^{9}/_{13}$ короба).*

54) Требуется вывести ограду для прямоугольнаго мѣста ABCD (фиг. 293), длина AB котораго равна 20 саж. и ширина AD равна $14^{5}/_{8}$ саж. Эта ограда должна состоять изъ четырегранныхъ столбовъ, поставленныхъ въ разстояніи сажени одинъ отъ другаго, высотою въ $3^{1}/_{2}$ ар. каждый столбъ, длиною *a*C въ 15 вершк. и шириною *ab* въ 12 вершк. Сколько потребно кирпичей на эти столбы, когда извѣстно, что кубическая сажень стѣны вмѣщаетъ въ себѣ 3540 кирпичей? — *(16778 кирпичей).*

фиг. 293.



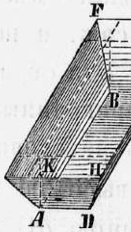
55) Сколько гирь, вѣсомъ въ одинъ фунтъ каждая, можно вылить изъ желѣзнаго ядра, коего діаметръ равенъ $5^{4}/_{5}$ дюйма, когда извѣстно, что $^{1}/_{10}$ вѣса ядра полагается на угаръ, вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника и желѣзо тяжелѣе воды во столько разъ, во сколько разъ 7778 больше 1000? *(28 гирь).*

56) Кубъ березоваго дерева положенъ въ воду такимъ образомъ, что его боковыя ребра перпендикулярны къ поверхности воды; ребро этого куба равно $2^{1}/_{2}$ футамъ, вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника и вѣсъ березы составляетъ $^{3}/_{5}$ вѣса воды. На сколько этотъ кубъ

погрузился въ воду, когда извѣстно, что всякое тѣло, погруженное въ воду, вытѣсняетъ такой объемъ воды, котораго вѣсъ равенъ вѣсу этого тѣла? — (*Вычисливъ вѣсъ этого куба, вы найдете 62208 зол.; стало быть вѣсъ воды, вытѣсненной кубомъ, равенъ 62208 зол. Раздѣливъ 62208 зол. на $3^{21}/_{25}$ зол., вы найдете объемъ вытѣсненной воды, равный 16200 куб. дюйм. Чтобы опредѣлить высоту этой вытѣсненной воды, вы раздѣлите 16200 куб. дюйм. на 900 квадр. дюйм. (площадь основанія куба) — узнаете, что кубъ погрузился въ воду на $1^1/_2$ фута*).

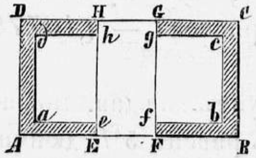
57) Требуется вырыть ровъ (фиг. 294), верхняя длина GH котораго должна равняться 41 саж., нижняя длина AB — 39 саж. 4 фут., верхняя ширина FG — $1^1/_2$ саж., нижняя ширина AD — $7^1/_2$ фут. и глубина KA — $5^3/_4$ фут. Сколько потребно телѣжекъ для перевозки вырытой земли, когда извѣстно, что телѣжка вмѣщаетъ въ себѣ $8^3/_4$ кубич. фута земли? — (См. § 213. — *Почти 1670 телѣжекъ*).

фиг. 294.



58) Требуется вывести цоколь EADH*hdae* и FBCG*gcbf* (фиг. 295), высотою въ $1^1/_2$ ар. и толщиною въ $26^1/_2$ вершк., для зданія ABCD въ которомъ длина AB содержитъ 28 ар., ширина BC равна 21 ар. и ширина EF воротъ равна $4^1/_2$ ар. Сколько потребно бутовой плиты на этотъ цоколь, когда на 6 куб. саж. стѣны полагается $6^7/_{12}$ куб. саж. плиты? — (*Почти $8^3/_{10}$ куб. саж. плиты*).

фиг. 295.



59) Сколько брусковыхъ гвоздей, длиною въ 9 дюймовъ, получится изъ 5 желѣзныхъ полосъ, длиною въ 5 футовъ, шириною въ 3 дюйма и толщиною въ 2 дюйма каждая полоса, 4 полосъ, длиною въ 4 фута, шириною въ $2^1/_4$ дюйма и толщиною въ $1^3/_4$ дюйма каждая полоса, 6 полосъ, длиною въ 6 футовъ, шириною въ 2 дюйма и толщиною въ $1^1/_2$ дюйма каждая полоса, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго фута желѣза равенъ 573 фунтамъ, 250 брусковыхъ гвоздей составляютъ пудъ и при выковкѣ желѣза полагается угару по $5^1/_2$ фунтовъ на каждый пудъ? — (*6885 гвоздей*).

60) Брусъ сосноваго дерева, длиною въ 3 сажени, шириною въ $7^1/_8$ вершка и толщиною въ $5^1/_8$ вершка, широкою гранью положенъ въ воду. На сколько вершковъ брусъ опустился въ воду, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ золотника и свѣжее сосновое дерево во столько разъ легче воды, во сколько разъ 23 меньше 25? — (См. № 56. — *Почти на $4^7/_{10}$ вершка*).

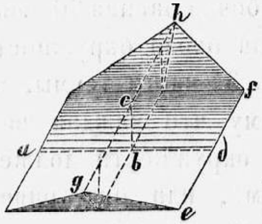
61) Сколько штофовъ вина содержитъ бочка, когда измѣреніемъ найдено, что ея длина 5 фут., діаметръ выпуклой части 2 фута 10 дюйм., діаметръ дна 2 фута 2 дюйма, толщина стѣнъ бочки $^3/_4$ дюйма, лады выдаются за дно на 2 дюйма, и извѣстно, что штофъ содержитъ $75^1/_{20}$ куб. дюйма? — (Для измѣренія вмѣстимости бочки измѣряются ея длина, окружность дна и окружность выпуклой части. Длина бочки измѣряется тесмою, раздѣленною на дюймы, а окружности измѣряются другою тесмою, раздѣленною на части равныя каждая $3^1/_7$ дюйм. Измѣреніемъ получена длина бочки равная 60 дюйм. (5 фут.), а посредствомъ тесмы, обвитой около окружности, найдено, что эта окружность содержитъ 34 части тесмы, которыя составляютъ $106^6/_7$ дюйм., потому-что каждая часть содержитъ $3^1/_7$ дюйма; діаметръ этой окружности долженъ быть въ $^{314}/_{100}$ раза менѣе $106^6/_7$ дюйм., или онъ равенъ 34 дюйм. (2 фута 10 дюйм.); слѣдовательно число частей тесмы, содержащихся въ окружности, опредѣлитъ число дюймовъ, содержащихся въ діаметрѣ этой окружности. Такимъже образомъ найдено, что діаметръ дна бочки равенъ 26 дюйм. — Длина бочки должна быть уменьшена на удвоенную толщину стѣнъ и на удвоенную выдающуюся часть ладовъ, т. е. внутренняя длина бочки содержитъ 60 дюйм. безъ $1^1/_2$ и 4 дюйм., или она равна $54^1/_2$ дюйм. Внутренній діаметръ

выпуклой части содержитъ 34 дюйм. безъ $1^1/_2$ дюйм., или онъ равенъ $32^1/_2$ дюйм. Внутренній діаметръ дна содержитъ 26 дюйм. безъ $1^1/_2$ дюйм., или онъ равенъ $24^1/_2$ дюйм. Окружность выпуклой части содержитъ $^{314}/_{100}$ раза $32^1/_2$ дюйма ($102^1/_{20}$ дюйм.); площадь круга выпуклой части равна $829^5/_{32}$ квад. дюйм. Удвойте эту площадь (получите $1658^5/_{16}$ квад. дюйм.). Внутренняя окружность дна содержитъ $76^{93}/_{100}$ дюйм., площадь круга дна равна $471^{157}/_{800}$ квад. дюйм. Сложите $1658^5/_{16}$ и $471^{157}/_{800}$ — получите $2129^{407}/_{800}$ квад. дюйм. Помножьте $2129^{407}/_{800}$ на $54^1/_2$ (внутреннюю длину бочки) — получите почти 116052. Раздѣливъ 116052 на 3, получите 38684, и раздѣливъ 38684 на $75^1/_{20}$, получите почти 516 штофовъ).

62) Требуется сдѣлать желѣзную цилиндрическую гирю, вѣсомъ въ одинъ пудъ и высотою въ $^1/_2$ фута. Какой длины долженъ быть діаметръ основанія этой гири, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма желѣза равенъ $29^{22}/_{25}$ золотника? — *(Почти $5^{13}/_{57}$ дюйма).*

63) Для проложенія желѣзной дороги требуется прорыть гору по горизонтальному направленію *ad* (фиг. 296); высота *cb* горы равна $5^1/_2$ саженямъ, горизонтальное разстояніе *ab* основанія *b* перпендикуляра *cb* до подошвы *a* покатости *ac* равно 43 саж. и горизонтальное разстояніе *bd* точки *b* до подошвы *d* покатости *cd* равно 27 саж. Ширина *ef* основанія выемки должна равняться 20 футамъ и ея ширина *gh* у вершины горы 11 саженямъ. Вычислить кубическое содержаніе земли этой выемки. — *($1072^1/_2$ кубич. саж.).*

Фиг. 296.



64) На выходящихъ изъ-за стѣны частяхъ трехъ дубовыхъ балокъ требуется построить балконъ; длина выдающихся частей балокъ равна 2 ар., ширина 3 вершкамъ и толщина 5 вершкамъ. Узнать, какой грузъ можетъ быть выдержанъ этими балками, взявъ въ разсчетъ ихъ вѣсъ и зная, что крѣпкій дубъ во столько разъ легче воды, во сколько разъ 17 менѣе 20, вѣсъ кубич. вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ золотника, и что выдающаяся часть дубовой балки, имѣющая видъ куба съ ребромъ въ 1 вершокъ, выдерживаетъ грузъ въ 208 пудовъ. — (Помножьте площадь основанія балки на 5 вершк. (ея толщину) и на найденное число 208 пуд. Раздѣлите то, что получится, на 32 (длину выдающейся части балки) — получите 19500 фунт. Вычислите объемъ и вѣсъ выдающейся части балки — получите $87^{93}/_{200}$ фунт.; балка можетъ выдержать 19500 фунт. безъ $87^{93}/_{200}$ фунт. Балки могутъ выдержатъ почти 1458 пудовъ).

65) Заказаны чугунныя трубы, внутренній діаметръ которыхъ долженъ равняться $6^1/_2$ дюймамъ и толщина стѣнокъ должна быть въ $^3/_4$ дюйма. Сколько пудовъ чугуна пойдетъ на эти трубы, когда они должны составить длину въ 45 саж., и извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма чугуна равенъ $27^{17}/_{25}$ золотника? — *(Почти $465^1/_4$ пуда).*

66) Требуется проложить полотно желѣзной дороги по скату CA горы (фиг. 297). Измѣреніемъ найдено, что горизонтальная прямая BC равна 360 саж. и вертикальная прямая AB равна 6 фут. Верхней поверхности полотна должно дать 1 футъ паденія на протяженіи 1 версты, т. е. при BC въ 1 версту вертикальное разстояніе BD должно равняться 1 футу. Основываясь на этомъ, требуется узнать, сколько потребно кубическихъ саженъ земли для возведенія этого полотна, когда его верхняя ширина *ab* должна равняться 2 саж. и нижняя ширина *dc* — $3^1/_2$ саж. — *($339^3/_7$ куб. саж.).*

Фиг. 297.

67) Какую тяжесть можетъ поднять воздушный шаръ, наполненный водороднымъ газомъ, когда діаметръ шара содержитъ 4 саж., вѣсъ кубической сажени воздуха равенъ почти 2957 золотник., водородный газъ во столько разъ легче воздуха, во сколько разъ 43 меньше 625, и вѣсъ квадрат-

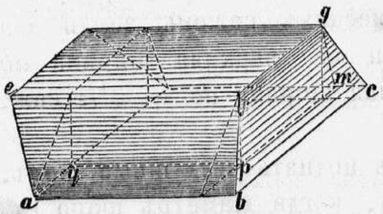
наго аршина матеріи, изъ которой сдѣланъ шаръ, равенъ 22 золотникамъ? — (Сперва вычислите поверхность шара и вѣсъ матеріи; потомъ вы найдете объемъ шара и вѣсъ воздуха, вмѣщающагося въ шарѣ. Вѣсъ шара, наполненнаго воздухомъ, равенъ $108987^{23}/_{75}$ золот. Вѣсъ шара, наполненнаго водороднымъ газомъ, равенъ почти $16761^{33}/_{46}$ зол. Шаръ, наполненный водороднымъ газомъ, можетъ поднять $108987^{23}/_{75}$ золот. безъ $16761^{33}/_{46}$ золот., или почти 24 пуда).

68) Вычислить тяжесть, которую можетъ выдержать отвѣсно висящая желѣзная полоса, длина которой 20 футовъ и діаметръ основанія равенъ $1^3/_4$ дюйма, взявъ въ разсчетъ вѣсъ полосы и зная, что вѣсъ кубическаго дюйма желѣза равенъ почти 30 золотникамъ и что желѣзная полоса, имѣющая въ ширину и толщину по 1 дюйму, выдерживаетъ тяжесть въ 40000 фунтовъ. — *(Почти 2400 пудовъ).*

69) Требуется построить вѣтряную мельницу въ видѣ усѣченнаго конуса, высотою въ 20 ар.; верхній внутренній діаметръ этого конуса равенъ 6 ар.; нижній внутренній діаметръ равенъ 14 ар.; толщина стѣны у основанія равна $1^1/_2$ ар., а у крыши она равна 1 ар. Сколько потребно кирпичей на возведеніе этой мельницы, когда извѣстно, что въ кубической сажени вмѣщается 3540 кирпичей, и что $^1/_{20}$ часть этого количества полагается на изломъ? — *(Почти 124639 кирпичей).*

70) Требуется построить плотину (фиг. 298), коей высота *fp* должна равняться 2 саж., верхняя ширина *fg* — 3 саж., нижняя ширина *bc* — 7 саж., верхняя длина *ef* — 15 саж., нижняя длина *ab* — $15^1/_2$ саж. и разстоянія *aq*, *mc* и т. д. должны содержать по 2 сажени. Сколько потребно булыжнаго камня на возведеніе этой плотины, когда на 4 куб. саж. полагается $4^1/_2$ куб. саж камня? — *(Почти 173 куб. саж. камня).*

фиг. 298.

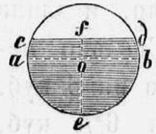


71) Измѣреніемъ найдено, что ртутный столбъ, вѣсомъ въ $1^{13}/_{16}$ фунта, занимаетъ $4^1/_2$ дюйма по длинѣ стеклянной трубки. Сколько дюймовъ содержитъ внутренній діаметръ этой трубки, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма ртути равенъ $52^1/_5$ золотника? — *($9^5/_7$ линіи).*

72) Требуется засыпать прудъ (фиг. 294), верхняя длина GH котораго равна 20 саж., верхняя ширина FG равна 14 саж., нижняя длина AB равна 17 саж., нижняя ширина AD равна 10 саж. и глубина KA равна 3 саж. Для засыпки этого пруда назначена земля съ прямоугольнаго поля, длина котораго 56 и ширина 38 саж. На сколько футовъ глубины должно вырыть землю? — *(На $2^5/_{24}$ фута).*

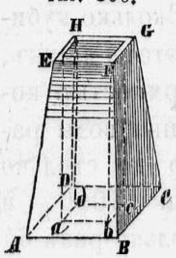
73) Бревно дубоваго дерева, длиною въ 4 саж. и толщиною въ 7 вершковъ, опущено въ воду. На сколько вершковъ это бревно погрузится въ воду, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ золот. и сухой дубъ во столько разъ легче воды, во сколько разъ 17 меньше 20? — (Вычислите половину площади основанія бревна и потомъ объемъ и вѣсъ бревна; этотъ вѣсъ равенъ вѣсу вытѣсненной воды. Руководствуясь рѣшеніемъ задачи № 56, вы опредѣлите объемъ вытѣсненной воды, равный $6277^{61}/_{125}$ куб. вершк. Раздѣливъ $6277^1/_2$ куб. вершк. на 192 верш. (длину бревна), вы узнаете, что въ водѣ находится часть *ced* (фиг. 299) основанія бревна, равная $32^{89}/_{128}$ квадр. вершка. Площадь *ced* больше площади *aeb* на $13^5/_{12}$ квадр. вершка. Раздѣливъ $13^5/_{12}$ квад. вершк. на 7 верш. (діаметръ бревна), вы найдете длину *of*. Бревно опустилось въ воду на *fe* $= 5^5/_{12}$ вершка).

фиг. 299.



74) Сколько потребно кирпичей для возведенія дымоотводной трубы, имѣющей видъ усѣченной пирамиды ABCDEFGH (фиг. 300), коей нижнее основаніе квадратъ ABCD съ стороною въ $11^1/_4$ фута, верхнее основаніе квадратъ EFGH съ стороною въ $2^{11}/_{12}$ фута, высота равна 48 футамъ, длина *ab* внутренняго

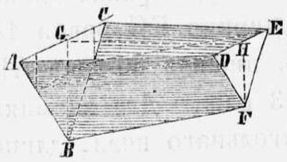
фиг. 300.



отверстія равна $1^{1}/_{2}$ фут. и его ширина *bc* равна $1^{1}/_{3}$ фута, когда въ кубической сажени стѣны вмѣщается 3540 кирпичей и $^{1}/_{20}$ этого количества полагается на изломъ? — *(Почти 28069 кирпичей).*

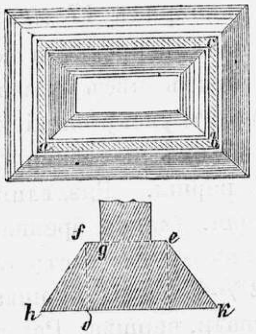
75) Для осушенія болота требуется вырыть канавку (фиг. 301), коей горизонтальная длина GH должна равняться 150 саж., ширина AC — 11 фут., ширина DE — 5 фут., глубина GB — 6 фут. и глубина HF — 3 фут. Во сколько дней 5 рабочихъ могутъ вырыть эту канавку, работая въ день по 8 часовъ, когда извѣстно, что въ часъ рабочій можетъ вырыть 36 кубическихъ футовъ земли? — *(Въ $13^{1}/_{8}$ дня).*

фиг. 301.



76) Изъ бутовой плиты требуется построить фундаментъ, высотою *fd* въ $1^{1}/_{2}$ ар. (фиг. 302), шириною *fe* вверху въ $1^{1}/_{2}$ ар. и шириною *hk* внизу въ $4^{1}/_{2}$ ар.; плоскости стѣнъ дома должны отстоять отъ верхнихъ ребръ фундамента на *fg* = 4 вершк., длина стѣны *ab* равна 30 ар. и длина стѣны *bc* равна 25 ар. Сколько потребно бутовой плиты, когда на 6 куб. саж. фундамента полагается $6^{2}/_{3}$ куб. саж. плиты? — *($19^{17}/_{27}$ куб. саж. бутовой плиты).*

фиг. 302.



77) Ящикъ, наружная длина котораго 2 сажени, ширина $3^{1}/_{2}$ ар. и высота 4 ар., сколоченъ изъ сосновыхъ брусьевъ, шириною и толщиною по 6 вершк. Сколько кубическихъ сажень песчаннику можно вложить въ этотъ ящикъ, чтобы онъ находился на $^{1}/_{2}$ аршина надъ поверхностью воды, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго вершка воды равенъ $20^{29}/_{50}$ золотника, сухое сосновое дерево во столько разъ легче воды, во сколько разъ 473 меньше 1000, и песчаникъ во столько разъ тяжелѣе воды, во сколько разъ 64 больше 25? — (Сперва должно вычислить объемъ параллелопипеда, коего длина равна 2 саж., ширина $3^{1}/_{2}$ ар. и высота 4 ар., и потомъ вмѣстимость ящика. Вычтя эту вмѣстимость изъ найденнаго объема, вы помножите полученное число на $20^{29}/_{50}$ и то, что получится, на $^{473}/_{1000}$ — вы узнаете, что вѣсъ ящика равенъ почти 1262505 золот. Раздѣливъ 1262505 золот. на $20^{29}/_{50}$, вы получите объемъ воды, вытѣсненной ящикомъ. Площадь основанія этого объема получится умноженіемъ 96 вершк. (2 саж.) на 56 вершк. ($3^{1}/_{2}$ ар.). Раздѣливъ этотъ объемъ на найденную площадь, вы опредѣлите его высоту, равную $11^{1}/_{2}$ вершк. Теперь вы узнали, что пустой ящикъ находится на $52^{1}/_{2}$ вершк. надъ поверхностью воды; требуется его погрузить еще на $44^{1}/_{2}$ вершк. Вычислите объемъ параллелопипеда, коего длина равна 84 вершк., ширина 44 вершк. и высота $44^{1}/_{2}$ вершк. Потомъ помножьте этотъ объемъ на $20^{29}/_{50}$ зол. и раздѣлите найденное число на вѣсъ куб. вершка песчаннику — получите почти 16 куб. ар. песчаннику).

78) Изъ песчаннику построить на сваяхъ плотину (фиг. 285), нижняя длина BC которой равна 32 саж., верхняя длина $bc = 23$ саж., нижняя ширина $AB = 8$ саж., верхняя ширина $ab = 3$ саж. и высота $bf = 3^{1}/_{2}$ саж.; діаметръ свай равенъ 6 вершк., вѣсъ кубическаго вершка песчаннику равенъ почти $52^{2}/_{3}$ золот. и квадр. дюймъ сосноваго бруса выдерживаетъ грузъ въ $3075^{1}/_{5}$ фунта. Сколько потребно свай подъ эту плотину? — *(124 сваи).*

Вопросы, относящіеся къ курсу геометріи.

1) На прямой CD (фиг. 103) найти точку, коей разстояніе отъ прямой AB равнялось бы прямой *m*.

2) На какой линіи должны находиться всѣ точки, равно-отстоящія отъ одной точки A?

3) На окружности (фиг. 111), описанной изъ точки O радіусомъ OE, найти точки, равно-отстоящія отъ точекъ F и P.

4) Найти точку, равно-отстоящую отъ трехъ точекъ D, B, E, (фиг. 23).

5) Какъ найти точку, равно-отстоящую отъ точекъ D и E (фиг. 23), и коей разстояніе отъ прямой AC равняется $^1/_8$ дюйма?

6) Чрезъ D (фиг. 22) провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ точекъ A и B, были бы равны.

7) Чрезъ вершину *c* треугольника *abc* (фиг. 33) провести прямую такъ, чтобы она составляла равные внѣшніе углы съ сторонами *ac* и *bc*.

8) Начертить прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 85), коего гипотенуза AC должна равняться $^3/_4$ вершка и острый уголъ ACB долженъ содержать 53 градуса.

9) Начертить треугольникъ ABC (фиг. 142), коего основаніе BC должно равняться $1^1/_4$ дюйма, высота AG должна содержать $2^1/_8$ дюйма и сторона AC должна равняться 2 дюймамъ.

10) Начертить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы стороны AB и BC (фиг. 29) были равны, уголъ ABC равнялся 65° и сторона AB содержала $1^1/_2$ дюйма.

11) Начертить равносторонній треугольникъ ABC (фиг. 85), коего высота BD должна равняться 2 дюймамъ.

12) Начертить такой четыреугольникъ ABCD (фиг. 65), въ которомъ сторона AB равна $1^3/_4$ дюйма, $BC = 1^1/_2$ дюймамъ, $CD = 2^1/_8$ дюйма, уголъ $ADC = 97^\circ$ и уголъ $BAD = 86^\circ$.

13) Начертить параллелограмъ, равный половинѣ треугольника ABC (фиг. 99), такъ, чтобы острый уголъ параллелограма равнялся углу BAC треугольника ABC.

14) Начертить квадратъ, равный суммѣ квадратовъ *abcd* и ABCD (фиг. 133).

15) Начертить квадратъ, коего площадь равнялась бы половинѣ площади квадрата *abcd* (фиг. 133).

16) Начертить прямоугольникъ, равномѣрный параллелограму ABCD (фиг. 66).

17) На какой линіи должны находиться центры окружностей, описанныхъ радіусомъ AB и проходящихъ чрезъ точку C?

18) Найти линію, на которой должны находиться центры окружностей, проходящихъ чрезъ двѣ точки A и B.

19) Найти линію, на которой должны находиться центры окружностей, касающихся къ прямой AB въ точкѣ C.

20) Найти линію, на которой должны находиться центры окружностей, касающихся къ окружности CB (фиг. 91) въ точкѣ D.

21) Найти линію, на которой должны находиться центры окружностей, касающихся къ сторонамъ угла.

22) Къ окружности круга провести двѣ касательныя, пересѣкающіяся подъ угломъ въ 64°.

23) Къ окружности провести касательную параллельно къ прямой AB (фиг. 15).

24) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы ея центръ находился на прямой AC (фиг. 23) и чтобы она прошла чрезъ точки D и E.

25) На прямой AB (фиг. 110) найти такую точку, которая ближе всѣхъ прочихъ точекъ этой прямой отстояла бы отъ окружности OC.

26) Радіусомъ AB описать окружность, которая должна пройти чрезъ двѣ точки C и D.

27) Радіусомъ, равнымъ $^3/_4$ дюйма, описать окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ точку B (фиг. 116) и касалась къ окружности OA.

28) Радіусомъ, равнымъ прямой *m*, описать окружность изъ точки на прямой AB (фиг. 103) такъ, чтобы эта окружность касалась къ прямой CD.

29) Чрезъ точку G (фиг. 102) провести въ кругѣ OH хорду такимъ образомъ, чтобы она въ точкѣ G раздѣлилась пополамъ.

30) Чрезъ точку C окружности PD (фиг. 102) провести хорду такъ, чтобы ея разстояніе отъ центра P равнялось прямой *m*.

31) Изъ точки E (фиг. 109) къ окружности PC провести сѣкущую такъ, чтобы ея внѣшняя часть EA равнялась прямой BO.

32) Чрезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей (фиг. 104) провести прямую, длиною въ $1^1/_4$ дюйма, такъ, чтобы ея части были хорды окружностей.

33) Представивъ себѣ десятину въ видѣ прямоугольника, коего основаніе равно 60 саж., изобразить ее на бумагѣ въ масштабѣ (фиг. 81), коего дюймъ соотвѣтствуетъ 50 саженямъ.

34) Чрезъ точку F между сторонами угла BAD (фиг. 82) провести прямую BD такъ, чтобы часть BF составляла $^3/_4$ части DF.

35) Въ кругѣ (фиг. 88) провести діаметръ такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на этотъ діаметръ изъ точекъ A и B, отрѣзали на немъ часть, равную хордѣ EF.

36) На окружности (фиг. 90) найти такую точку E, чтобы ея разстояніе отъ точки B было вдвое больше ея разстоянія отъ точки A.

37) Требуется описать окружность круга, въ которомъ хорда должна равняться прямой EF (фиг. 30); чрезъ точку B этой хорды должна пройти вторая хорда подъ угломъ въ 126° такимъ образомъ, чтобы она въ точкѣ B раздѣлилась по-поламъ.

38) Общую сторону EB (фиг. 16) двухъ смежныхъ угловъ ABE и CBE требуется продолжить внизъ на столько, чтобы чрезъ точки A, E, C и оконечную точку продолженной прямой EB можно было провести окружность.

39) Принявъ прямую *ab* (фиг. 132) за гипотенузу, начертить прямоугольный треугольникъ, коего площадь равнялась бы площади квадрата HKLM.

40) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы сторона AB угла ABC (фиг. 62) была касательная, а сторона BC сѣкущая.

41) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы она прошла чрезъ точки A и P (фиг. 62) и касалась къ прямой BC.

42) На планѣ начерченъ прямоугольникъ *abcd* по масштабу 100 сажень въ англійскомъ дюймѣ; истинная длина AB этого прямоугольника содержитъ 124 сажени и его ширина BC равна 73 саж.; во сколько разъ площадь ABCD въ натурѣ больше площади *abcd* на планѣ? — (*Въ 70,560,000 разъ*).

43) Начертить равносторонній треугольникъ, коего высота должна равняться $1^3/_4$ дюйма.

44) Начертить параллелограмъ *abcd*, равномѣрный параллелограму ABCD (фиг. 66), такъ, чтобы уголъ *abc* равнялся 57°.

45) Діаметръ экватора равенъ 1719 географическимъ милямъ; сколько верстъ содержитъ градусъ экватора, когда извѣстно, что географическая миля равна почти 7 верстамъ? — (*Почти 105 верстъ*).

46) Начертить треугольникъ *abc*, равномѣрный треугольнику ABC (фиг. 139), такимъ образомъ, чтобы уголъ *abc* содержалъ 90°.

47) Сколько десятинъ и квадратныхъ сажень можно изобразить на листѣ бумаги, длиною въ 10 и шириною въ 8 вершковъ, по масштабу 50 сажень въ дюймѣ? — (*255 десятинъ 500 квадр. саж*).

48) Начертить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, равномѣрный квадрату ABCD (фиг. 70).

49) Начертить параллелограмъ, равномѣрный квадрату ABCD (фиг. 70), такъ, чтобы основаніе параллелограма равнялось прямой KL.

50) Въ машинѣ два колеса: большое и малое; большое колесо дѣлаетъ въ минуту одинъ оборотъ, а малое колесо въ тоже самое время дѣлаетъ 15 оборотовъ; сколько дюймовъ содержитъ діаметръ малаго колеса, когда діаметръ большаго равенъ $3^3/_4$ фута? — (*3 дюйма*).

51) Опредѣлить линію, на которой должны находиться центры окружностей, описанныхъ радіусомъ AB, и касающихся къ прямой CD.

52) Опредѣлить линію, на которой должны находиться центры окружностей, описанныхъ радіусомъ OB (фиг. 108), и касающихся къ окружности PB.

53) Чрезъ точку D хорды CD (фиг. 101) проведена касательная AB; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ ADC, составляемый хордою CD и касательною AB, когда извѣстно, что хордѣ CD соотвѣтствуетъ дуга въ 67° 38′? — (*146° 11′*).

54) Вписанный уголъ BHC равенъ 124° 25′; сколько градусовъ и минутъ содержитъ вписанный уголъ BAC (фиг. 95)?

55) Хорда AG (фиг. 95) содержитъ $23^1/_2$ фута и высота *an* дуги A*a*G равна 4 футамъ; сколько футовъ содержитъ радіусъ AO?

56) Къ окружности CE провести касательныя перпендикулярно къ прямой AB (фиг. 12).

57) Изъ точки A (фиг. 12) описать окружность такъ, чтобы она касалась къ окружности CE.

58) Радіусомъ, равнымъ прямой CE (фиг. 12), описать окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ точки A и B.

59) Въ кругѣ вписать треугольникъ ABC, коего основаніе AC должно равняться $^3/_4$ дюйма и сторона BC должна составлять $^7/_8$ стороны AC.

60) Чрезъ оконечность A (фиг. 92) діаметра AB проведена хорда AD, длиною въ $8^1/_2$ дюйм.; прямая DC, проведенная перпендикулярно къ діаметру, раздѣляетъ его на двѣ части такъ, что CB = $^2/_7$ AC. Вычислить длину радіуса AO. — *($4^{23}/_{28}$ дюйм.)*

61) Хорда AC (фиг. 95) пересѣкаетъ діаметръ BG подъ прямымъ угломъ въ разстояніи OD, равномъ $10^1/_2$ дюйм., отъ центра O. Вычислить длину этой хорды, когда извѣстно, что радіусъ OG равенъ $17^1/_2$ дюйм. — *(14 дюйм.)*

62) Вычислить площадь трапеціи KLMN (фиг. 70), въ которой KN = 120 саж., уголъ KLM = 45°, NM=160 саж. и уголъ LKN = 60°. — *($25094^{17}/_{32}$ квад. саж.)*.

63) Къ окружности PF (фиг. 110) проведена касательная AB, которая съ продолженнымъ діаметромъ составляетъ уголъ ADE въ 58° 35′; сколько градусовъ и минутъ содержитъ дуга ECF? — *(211° 25′)*.

64) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 85) перпендикуляръ BD = 15 фут. и его разстояніе AD отъ вершины A равно 32 фут.; сколько футовъ содержитъ гипотенуза AC? — *($39^1/_{32}$ фута)*.

65) Два города A и B, имѣющіе одну и ту-же географическую широту, лежатъ на параллельномъ кругѣ, коего радіусъ равенъ 572 географическимъ милямъ; географическая долгота города A равна 54° 20′ и города B равна 75°; сколько миль между этими городами по направленію параллельнаго круга? — *(Почти 206 миль)*.

66) Площадь квадрата равна площади круга, содержащей $182^1/_4$ квад. фут.; на сколько сторона квадрата больше или меньше діаметра круга? — *(Сторона квадрата меньше діаметра круга на $1^{13}/_{14}$ фута)*.

67) Сторона квадрата ABCD (фиг. 114) равна діаметру EF вписаннаго круга. Какую часть площади ABCD составляетъ площадь круга, когда его діаметръ равенъ 15 дюймамъ? — *($^{157}/_{200}$)*.

68) На сколько площадь круга, равная 1256 квад. дюйм., меньше площади вписаннаго въ немъ правильнаго шестиугольника AGCHBK (фиг. 95)? — *(На 221 квад. дюйм.)*.

69) Въ квадратѣ ABCD (фиг. 114), коего сторона равна $7^1/_2$ дюйм., вписать четыре равные круга, касающіеся между собою и къ сторонамъ квадрата, и вычислить площади этихъ круговъ? — *($44^5/_{32}$ квад. дюйм.)*.

70) Описать окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ точки C и P (фиг. 111) и касалась къ прямой AB.

71) На сторонѣ AC угла BAC (фиг. 83) найти точку, равно-отстоящую отъ вершины A и отъ точки G, находящейся на сторонѣ AB.

72) Требуется начертить прямоугольникъ ABCD (фиг. 68) въ 1920 квадр. дюйм., въ которомъ высота AD должна составлять $^5/_6$ основанія AB; сколько дюймовъ должно содержать основаніе AB? — *(48 дюймовъ)*.

73) Вычислить площадь квадрата ABCD, вписаннаго въ кругѣ (фиг. 96), коего діаметръ AC содержитъ $3^3/_4$ фута. — *($7^1/_{32}$ квад. фут.)*.

74) Вычислить площадь трапеціи, составленной изъ трехъ равныхъ равностороннихъ треугольниковъ, коихъ стороны содержатъ по $2^1/_3$ фута. — *(Почти $1016^2/_5$ квад. дюйм.)*.

75) Вычислить площадь круга, въ которомъ хорда *ab* (фиг. 87) равна 28 дюймамъ и ея разстояніе *c*O отъ центра O содержитъ 1 футъ. — *($1067^3/_5$ квад. дюйм.)*.

76) Въ цилиндрической коробкѣ, коей діаметръ равенъ $1^1/_4$ дюйма, помѣщается сотня зажигательныхъ спичекъ; сколько спичекъ помѣстится въ такой-же коробкѣ, діаметромъ въ два дюйма? — *(256 спичекъ)*.

77) Въ окружности CA (фиг. 104) чрезъ точку A, на ней лежащую, провести хорду такимъ образомъ, чтобы она окружностью DA раздѣлилась по-поламъ?

78) Отъ прямоугольнаго мѣста ABCD, длиною въ 185 и шириною въ 128 сажень, садовникъ отдѣлилъ на помѣщеніе парниковъ прямоугольникъ, длиною въ 64 сажени и шириною въ 48 сажень, и провелъ двѣ взаимно-пересѣкающіяся дороги: одну вдоль, другую поперегъ мѣста ABCD, параллельно къ его границамъ, шириною въ 4 фута каждую дорогу; сколько въ этомъ мѣстѣ осталось свободной земли? -- *(20429 квад. саж. 23 квад. фут.)*.

79) Окружность паралельнаго круга, отстоящаго отъ экватора на 60°, равна полуокружности экватора; сколько верстъ содержитъ дуга этого паралельнаго круга, равная 22° 30′, когда извѣстно, что діаметръ экватора равенъ 1719 географическимъ милямъ и географическая миля равна почти 7 верстамъ? — *(Почти $1180^{3}/_{4}$ версты).*

80) Вѣсъ круглой желѣзной полосы, длиною въ 1 сажень и діаметромъ въ $1^{7}/_{8}$ дюйма, равенъ $71^{2}/_{5}$ фунта; сколько вѣсу въ желѣзной полосѣ, длиною въ 5 футовъ и діаметромъ въ 2 дюйма? — *($1^{169}/_{375}$ пуда).*

81) Изобразить на бумагѣ фигуру, равномѣрную боковой поверхности прямаго конуса, коего высота равна 10 дюймамъ и радіусъ основанія равенъ 4 дюймамъ.

82) Начертить прямоугольный треугольникъ, равномѣрный боковой поверхности прямаго конуса, коего высота равна 15 дюймамъ и радіусъ основанія равенъ 7 дюймамъ.

83) Прямоугольный кусокъ жести, длиною въ $6^{1}/_{2}$ дюймовъ и шириною въ $4^{4}/_{5}$ дюйма, требуется согнуть въ трубку. Опредѣлить діаметръ и длину трубки. — *(Діаметръ = $2^{11}/_{157}$ дюйма или $1^{83}/_{157}$ дюйма; длина = $4^{4}/_{5}$ дюйма или $6^{1}/_{2}$ дюйм.).*

84) Чтобы найти давленіе, которое производитъ вода на дно сосуда, должно вычислить вѣсъ водянаго столба, коего основаніе равно основанію сосуда. Опредѣлить давленіе, произведенное водою, которая въ цилиндрическомъ сосудѣ занимаетъ 15 дюймовъ высоты, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золот. и окружность дна сосуда содержитъ $15^{7}/_{10}$ дюйма. — *($11^{31}/_{40}$ фунта).*

85) Начертить квадратъ, коего площадь должна равняться боковой поверхности цилиндра, имѣющаго 4 фута высоты и $2^{1}/_{2}$ фута въ діаметрѣ основанія.

86) Башня, высотою въ 64 фута, вмѣщаетъ въ себѣ 5024 куб. фут. и ея наружная окружность содержитъ $45^{53}/_{100}$ фута. Опредѣлить толщину стѣны башни. — *($2^{1}/_{4}$ фута).*

87) Требуется вырыть погребъ такимъ образомъ, чтобы его длина DC (фиг. 191) равнялась 28 футамъ, ширина AD — 18 футамъ и глубина при прямой DC — 5 футамъ. Вычислить вмѣстимость этого погреба, когда извѣстно, что прямая AB выше DC на $3^{1}/_{4}$ фута. — *($3246^{1}/_{4}$ куб. фут.).*

88) Вычислить объемъ пирамиды, въ которой периметръ квадратнаго основанія равенъ 14 фут. и периметръ боковой грани содержитъ $17^{1}/_{2}$ фут. — *($26^{13}/_{24}$ куб. фут.).*

89) Вычислить основаніе такого прямоугольника, коего площадь равна боковой поверхности и высота равна высотѣ усѣченнаго, въ которомъ діаметръ нижняго основанія равенъ $23^{1}/_{2}$ дюйм., діаметръ верхняго основанія равенъ $13^{1}/_{4}$ дюйм. и сторона равна $14^{3}/_{8}$ дюйм. — *(Почти 62 дюйма).*

90) Съ вершины горы, высотою въ 10000 футовъ, представляется глазу плоскость, составляющая $^{1}/_{4000}$ часть поверхности земнаго шара; сколько квадратныхъ миль содержитъ эта плоскость, когда извѣстно, что діаметръ экватора содержитъ 1719 миль? — *(Почти $2319^{1}/_{2}$ квад. миль).*

91) У крестьянина двѣ пашни: квадратная ABCD въ 400 квад. саж. и прямоугольная EFGH, длиною въ 25 и шириною въ 9 саж. Крестьянинъ, желая дать правильную фигуру участку, составленному изъ этихъ двухъ пашень, можетъ ихъ замѣнить квадратною пашнею P, или квадратъ ABCD превратить въ равномѣрный прямоугольникъ Q, коего сторона совмѣщается съ основаніемъ прямоугольника EFGH, или наконецъ превратить прямоугольникъ EFGH въ прямоугольникъ R, коего сторона совмѣщается съ стороною квадрата ABCD. Опредѣлить длину и ширину пашень P, Q и R. — *(Длина пашни P = 25 саж., длина пашни Q = 25 саж. и ширина = 16 саж., длина пашни R = 20 саж. и ширина = $11^{1}/_{4}$ саж.).*

92) Радіусомъ, равнымъ прямой CD (фиг. 86), описать окружность изъ точки, лежащей на сторонѣ AE угла AEB, такимъ образомъ, чтобы эта окружность касалась къ сторонѣ BE.

93) Радіусами, равными прямымъ AB и CD (фиг. 5), описать двѣ окружности, касающіяся между собою изъ-внѣ и къ прямой EM.

94) Описать окружность изъ точки, лежащей на катетѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 44), такимъ образомъ, чтобы она прошла чрезъ вершину B прямаго угла ABC и касалась къ гипотенузѣ AC.

95) Чрезъ точку D (фиг. 86) провести въ кругѣ хорду такимъ образомъ, чтобы она раздѣлилась въ D на двѣ части, изъ которыхъ меньшая должна равняться $^{3}/_{4}$ большей части.

96) Въ кругѣ (фиг. 96) провести хорду такимъ образомъ, чтобы она взаимно-перпендикулярными радіусами AO и BO раздѣлилась на три равныя части.

97) Начертить треугольникъ, коего площадь должна равняться поверхности шара, имѣющаго въ діаметрѣ 5 дюймовъ; сколько дюймовъ должно содержать основаніе этого треугольника, когда его высота равна удвоенному діаметру шара? — *($15^{7}/_{10}$ дюйма)*.

98) Опредѣлить толщину мѣднаго круга, равнаго вѣсу мѣднаго шара, когда извѣстно, что діаметръ круга равенъ 20 дюймамъ и окружность большаго круга шара содержитъ $23^{11}/_{20}$ дюйма. — *($^{45}/_{64}$ дюйма)*.

99) Шаръ, коего діаметръ содержитъ 9 дюймовъ, погрузился въ воду только на половину; сколько вѣсу въ этомъ шарѣ, когда извѣстно, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ $3^{21}/_{25}$ золотника? — *(Почти 7 фунтовъ 60 золот.)*.

100) Вычислить объемы куба, шара и цилиндра, когда поверхность каждаго изъ этихъ тѣлъ содержитъ 1000 квад. дюйм. и высота цилиндра равна діаметру его основанія. — *(Объемъ куба = почти 2113 куб. дюйм.; объемъ шара = почти $3081^{1}/_{4}$ куб. дюйм., объемъ цилиндра = почти $2492^{33}/_{79}$ куб. дюйм.)*.